
TAMPEREEN YLIOPISTO
Pro gradu -tutkielma

Iida-Maria Rajala

"Mulla ei oo tarpeeksi pitkää viivoitinta"
–kehittämistutkimus mittaamisen opettamisesta alakoulussa

Informaatiotieteiden yksikkö
Matematiikka
Marraskuu 2016

Tampereen yliopisto

Informaatitieteiden yksikkö

RAJALA, IIDA-MARIA: ”Mulla ei oo tarpeeksi pitkä viivoitinta” –kehittämistutkimus mittaamisen opettamisesta alakoulussa

Pro gradu -tutkielma, 90 s.

Matematiikka

Marraskuu 2016

Tiivistelmä

Tässä pro gradu -tutkielmassa tutkittiin oppikirja-analyysin avulla mittaamisen opetuksen nykytilannetta 2. luokan matematiikassa. Teoreettisen viitekehyksen avulla selvitettiin millainen toiminnallista ja ongelmaperustaista oppimista hyödyntävä oppimateriaali tukee pituuden ja massan oppimista ja konseptuaalisen sekä proseduraalisen tiedon kehittymistä. Tutkimuksen päätavoitteena oli kehittää toiminnallista ja ongelmaperustaista oppimista hyödyntävä oppimateriaali, jonka soveltuvuutta opettamiseen testattiin autenttisessa luokahuoneympäristössä.

Kehittämistutkimuksena tutkimusprosessi eteni kolmen iteratiivisen kehittämissyklin kautta raportointivaiheeseen. Teoreettisessa ongelma-analyysissä määriteltiin mitan käsitteet mittaamisen historian kautta, määriteltiin matemaattisen tiedon dualinen luonne, selvitettiin mittaamisen oppimisessa havaittuja haasteita, pohdittiin toiminnallisen ja ongelmaperustaisen oppimisen tuomia mahdollisuuksia mittaamisen opettamiseen sekä matematiikan kielentämisen hyötyä arvioitaessa oppilaiden oppimista. Empiirisessä ongelma-analyysissä analysoitiin kolme 2. luokan matematiikan oppikirjaa ja opettajanopasta mittaamisen sisältöalueiden osalta. Kehitettävä oppimateriaali perustui teoreettisen ja empiirisen ongelma-analyysin tuloksiin.

Kehitettyä oppimateriaalia testattiin tamperelaisen alakoulun 2. luokalla ($n = 24$) maaliskuussa 2016. Oppimateriaalin soveltuvuutta pituuden ja massan mittaamiseen havainnoitiin videoilta, luokanopettajan haastattelusta, oppilaiden tekemien tuntija kotitehtävien sekä oppilailta kerätyn itsearviointi- ja mielipidelomakkeen avulla. Tutkimus toteutettiin kvalitatiivisena, empiirisenä tapaustutkimuksena.

Oppimateriaalin soveltuvuuden arviointi osoitti oppilaiden ja tutkimusluokan luokanopettajan kokeneen kehitetyn materiaalin toimivaksi ja motivoivaksi. Keskeisiä opittavia asioita olivat pituuden ja massan käsitteellinen ymmärtäminen, erilaisen mittaproseduurien oppiminen sekä mittayksiköiden välinen yhteys ja yksiköiden käyttäminen. Oppimateriaalille asetetut tavoitteet saavutettiin hyvin ja testausvaiheen kokemukset olivat innostavia. Kehitetty oppimateriaali on ladattavissa osoitteesta: <https://drive.google.com/open?id=0BzWDtelpVN1vaDR5TDkwbDNTNm8> (luettu 8.11.2016).

Asiasanat: pituus; massa; konseptuaalinen tieto; proseduraalinen tieto; kielentäminen; toiminnallinen oppiminen; ongelmaperustainen oppiminen

Sisältö

1	Johdanto	7
2	Kehittämistutkimus	10
2.1	Taustaa ja määrittelyä	10
2.2	Syklimallin vaiheet	11
2.3	Luotettavuus	13
2.4	Tutkimukseen valitut metodit	15
3	Mittaamisen suppea historia	17
3.1	Antiikin ajoista Galileo Galileihin	18
3.2	SI-järjestelmän syntyminen	19
4	Mittaaminen osana Solmu-ohjelmaa	22
4.1	Matemaattisen tiedon duaalisuus	22
4.2	Mittaamisen oppimisen haasteet	25
4.3	Toiminnallinen ja ongelmaperustainen oppiminen	28
4.4	Matematiikan kielentäminen arviointivälineenä	31
5	Tutkimuskysymykset	34
6	Kehittämisprosessi	35
6.1	Empiirinen oppikirja-analyysi	35
6.2	Materiaalin kehittämisvaihe I	38
6.3	Empiirinen ongelma-analyysi 2	43
6.4	Materiaalin kehittämisvaihe II	43
6.5	Empiirinen ongelma-analyysi 3	45
7	Tulosten tarkastelu	48
7.1	Empiirinen oppikirja-analyysi	48
7.2	Pituuden ja massan oppimista tukeva oppimateriaali	51
7.3	Materiaalin soveltuminen pituuden ja massan opetukseen	52
7.4	Materiaalin kehittämisvaihe III	63
8	Johtopäätökset ja pohdinta	64
8.1	Johtopäätökset	64
8.2	Tutkimuksen luotettavuuden arviointi ja eettiset näkökulmat	68
8.3	Pohdinta ja jatkotutkimusmahdollisuudet	70
	Lähteet	74
	Liitteet	85

1 Johdanto

"Mittaa se, mikä on mitattavissa. Tee mitattavaksi se, mitä ei voi mitata."

Galileo Galilei

Vaan kuinka mitata, jos ei omista tarpeeksi pitkää viivoitinta. Tämän totesi eräs 7-luokkalainen oppilas selittäessään, miksi matematiikan kotitehtävät olivat tekemättä. Oppilaan aito hämmennys tilanteessa, jossa mitattava pituus oli pidempi kuin käytössä ollut mittaväline, kiteytyi lausahdukseen "*mulla ei oo tarpeeksi pitkää viivoitinta*". Koska kyseinen oppilas ei jäänyt ainoaksi, jolle mittaamistehtävät tuottivat hankaluuksia, heräsi mielenkiintoni mitan käsitteen ja mittaproseduurien osaamisesta. Pro gradu -tutkielmani aiheeksi täsmentyi pituuden ja massan opetukseen soveltuvan, konseptuaalista ja proseduraalista tietoa yhdistävän, toiminnallisen ja ongelmaperustaisen oppimateriaalin kehittäminen vastauksena kansainvälisesti [71, 44, 131] heikoiksi havaittuihin mittaamistaitoihin.

Mittaamisen periaatteen ymmärtäminen, erilaisten mittavälineiden käyttäminen, mittaustulosten arviointi, mittauksen tarkistaminen, omakohtaisten kokemusten syntyminen sekä mittayksiköiden käyttäminen ja yksikkömuunnokset ovat taitoja, joita on harjoitettava mitan käsitteen ymmärtämiseksi ja mittaproseduurien hallitsemiseksi [97]. Näiden taitojen opetus kuuluu Suomessa olennaisena osana peruskoulun matematiikkaa ja varsinkin alkuopetuksen aikana luodaan pohja myöhemmälle mittayksiköiden laajemmalle ymmärtämiselle [95]. Jo esiopetuksessa tutustutaan mittaamiseen, kuten vertailuun ja mittaamiseen liittyviin käsitteisiin "pidempi", "lyhyin" ja "yhtä pitkä". Nämä luovat edellytyksiä mittaamistaitojen kehittymiselle. [96]

Vaikka mittoja ja mittaamista on jatkuvasti kaikkialla ympärillämme, on vaikea ajatella kuinka paljon ja millä tavoin mitat vaikuttavat yhteiskuntaan ja yksilöön. Mittaamista käytetään sekä arkipäiväisissä tilanteissa että tekniikassa, arkkitehtuurissa ja lääketieteessä sekä monilla muilla tieteenaloilla. Hyödynnämme mittaamista erilaisissa tilanteissa päivittäin: oman painon punnitseminen, kahvin keittäminen, lämpötilan tarkistaminen, bensiinin tankkaaminen ja kellon katsominen ovat kaikki asioita, joissa mittaamme tottuneesti ja asiaan sen kummemmin huomiota kiinnittämättä. Mittaaminen onkin säilyttänyt asemansa läpi vuosisatojen olennaisena osana jokaisen ihmisen arkea. Mittaamistaitojen kehittymisellä on myös ollut merkitystä matematiikan kehittymiselle, kun lukuja on ryhdytty liittämään fysikaalisiin kohteisiin mahdollistaen kohteiden vertailun. Mittaamisella siis pyritään aina selvittämään jonkin suureen, eli laadultaan tunnistettavan ja määrältään mitattavan ominaisuuden arvoa, joka on saatu mittayksikön ja lukuarvon tulona.

Tutkimukseni aihe on ajankohtainen, sillä Suomessa ei ole kansainvälisiin tutkimuksiin osallistumisen lisäksi tutkittu mittaamisen opettamista tai oppimista. Toteutin tämän kehittämistutkimuksen kvalitatiivisena, empiirisenä tapaustutkimuksena ja tutkimukseni keskeisiä teemoja ovat mittaamisen historia, mittaamistaidot sekä toiminnallinen ja ongelmaperustainen oppiminen. Koska mitan käsite ja mittaproseduurit ovat kansainvälisissä tutkimuksissa [40, 71, 44, 131] koettu oppilaille haastaviksi

oppia, etsin tässä kehittämistutkimuksessa opetustapaa, jolla mittaamisen oppiminen olisi oppilaista mielekästä ja motivoivaa.

Suomalaisia tutkimuksia mittaamisen opetuksesta on viime vuosikymmeniltä varsin vähän ja esimerkiksi tyypillisen matematiikan tunnin kulusta saadaan varsinaisen tutkimustiedon sijaan tietoa opettajien omakohtaisten kokemusten pohjalta [99, 68]. Suomalaisen opetuskulttuurin voidaan viimeaikaisten väitöskirjojen [101, 123], oppimistulosten seuranta-arviointien [89, 90] ja matematiikan opetuksen tutkimusta käsittelevien julkaisujen [98, 68] perusteella sanoa olevan enemmän perinteistä kuin innovatiivista. Lisäksi matematiikan oppikirjojen ja opettajanoppaiden on havaittu määrittelevän oppituntien kulun ja ohjaavan opettajien työskentelyä niin, että opetussuunnitelman on todettu jääneen merkitykseltään toissijaiseksi (mm. [69, 101, 89]). Esimerkiksi Joutsenlahden ja Vainionpään [53] mukaan oppikirjasi-donnainen matematiikan opiskelu johtaa kaavamaisiin, oppikirjojen ja opettajanoppaiden ennalta määrittelemiin, kerta toisensa jälkeen samanlaisiin oppitunteihin. Oppitunnit aloitetaan pääsääntöisesti kotitehtävien tarkastuksella sekä päässälaskuilla tai oppimispeleillä, joita seuraa uuden asian opettaminen esimerkkitehtävin ja opetuskeskustelun avulla. Lopputunti käytetään itsenäiseen työskentelyyn ja tunnin päätteeksi annetaan uudet kotitehtävät. [99, 123, 98, 53] Matematiikan oppitunnit ovat siis perinteisesti oppilaiden hiljaista ja itsenäistä työskentelyä oppikirjan parissa. Konstruktivistisen oppimiskäsityksen mukaan oppilaan itsenäisen työskentelyn voidaan katsoa olevan oppilaan omaa aktiivista tiedon rakentamista. Toisenlaisen näkökulman oppijan aktiiviseen rooliin oman tiedon rakentajana tarjoavat toiminnallinen ja ongelma-perustainen oppiminen.

Toiminnallinen oppiminen ja ongelma-perustainen oppiminen pohjautuvat konstruktivistiseen oppimiskäsitykseen, jonka mukaan oppiminen mielletään aktiiviseksi tiedon konstruointiprosessiksi. Oppilaan oma ajattelu ja toiminta korostuvat ja pääpaino kohdistuu lopputuotoksen sijaan aktiiviseen oppimisprosessiin. Ajatus toimintaa ja konkretiaa hyödyntävästä opetuksesta on lähtöisin jo Deweyn 1920-luvulla painottamasta kasvatusfilosofiasta, tekemällä oppimisesta (*learning by doing*), jonka pääajatuksena oli oppilaiden luontaisen toiminnallisuuden hyödyntäminen oppimisprosessissa. Myös Piaget havaitsi lasten ajattelun kehittymistä tutkiessaan konkretian vaikuttavan lasten oppimiseen suotuisalla tavalla. Toiminnallisia työtapoja onkin hyödynnetty matematiikan opetuksessa jo pitkään. Niin ikään matematiikan opetuksessa on hyödynnetty ongelma-perustaista oppimista, jolla pyritään oppilaiden kriittisen ajattelun ja ongelmanratkaisutaitojen kehittämiseen. Oppilaiden ongelmanratkaisutaitojen, tiedon käsittelytaitojen sekä loogisen, täsmällisen ja luovan matemaattisen ajattelun kehittämiseen pyritään myös Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa 2016 [95]. Alkuopetuksessa ongelma-perustaista oppimista voidaan hyödyntää toiminnan ja konkretian kautta tapahtuvan itsenäisen ja monipuolisen työskentelyn avulla.

Hyödynnän kehittämässäni pituus- ja massakäsitteen opetuksen oppimateriaalissa luokanopettaja (KM) Maarit Laitisen Solmu-ohjelmaan kehittämiä lukumääräpaloja ja perehdyn tutkielmassani tämän konseptin teoriataustaan. Osana Luma-Suomi 2014–2019 kehittämisohjelmaa [79] oleva Solmu-ohjelma perustuu näkemykseen käsitteenmuodostuksen ja laskemistoimintojen rinnakkaisesta vahvistamisesta

ja vahvasta visualisoinnista. Peruslaskutaitojen vahvistamista ja sujuvaa sekä joustavaa käyttöä pyritään tukemaan ymmärryksellä luvun käsitteen muodostumisesta. Käsitteellinen ymmärtäminen on vahvasti läsnä opetuksen alusta alkaen ja oppimisessa hyödynnetään matematiikan kielentämistä eli koodinvaihtoa luonnollisen kielen, matemaattisen kielen, kuviokielen ja taktiilisen toiminnan kielen välillä. Luvun käsitettä hahmotetaan materiaalin avulla, joka mahdollistaa lukujen näkemisen, kuulemisen ja koskettamisen. Esimerkiksi lukumääräsaluunoiden ja lukumääräpalojen avulla oppilaiden huomio kiinnitetään lukumääriin ja lukumäärien hahmottaminen silmämääräisesti on tehty helpoksi. [74]

Luvussa 2 kerron kehittämistutkimuksesta tutkimusmenetelmänä sekä perustelen tässä tutkimuksessa käytetyt tutkimus- ja analyysimenetelmät. Luvussa 3 piti tuuden ja massan käsitteisiin perehdytään mittaamisen historian kautta. Luvussa 4 käsittelen matemaattisen tiedon duaalista luonnetta ja tarkastelen konseptuaalisen ja proseduraalisen tiedon välillä olevien ristiriitojen aiheuttamia vaikeuksia mittamisen oppimisessa. Lisäksi perehdyn luvussa toiminnalliseen ja ongelmaperustaiseen oppimiseen sekä kuvaan matematiikan kielentämistä osana oppilaan osaamisen arviointia. Esittelen tutkimuskysymykset luvussa 5 ja kuvaan luvussa 6 tämän kehittämistutkimuksen vaiheet alustavasta suunnittelusta oppimateriaalin testaukseen. Tutkimuksesta saadut tulokset kuvaan luvussa 7 ja luvussa 8 esittelen tehdyt johtopäätökset, pohdin tutkimuksen luotettavuutta ja eettisiä näkökulmia sekä mietin jatkokehitysmahdollisuuksia.

2 Kehittämistutkimus

Käsittelen tässä luvussa kehittämistutkimuksen taustaa ja vaiheita opetusalan näkökulmista (kappale 2.1), kuvailen kehittämistutkimuksen sisältämiä työvaiheita (kappale 2.2) sekä pohdin kehittämistutkimuksen luotettavuutta tutkimusmenetelmänä (kappale 2.3). Lisäksi kuvaan kappaleessa 2.4 tässä kehittämistutkimuksessa käytetyt tutkimusmenetelmät sekä perustelen tekemäni valinnat.

2.1 Taustaa ja määrittelyä

Opetusalalla kehittämistutkimus on opetuksen ja oppimisen tutkimisen menetelmä, jossa opetuksellisia innovaatioita pyritään kehittämään syklisessä prosessissa tutkimustulosten ja käytännön kokemusten pohjalta todellisissa oppimistilanteissa [28]. Ilmiönä opetuksellisella innovaatiolla tarkoitetaan uuden toimintatavan omaksumista yksilö-, ryhmä- tai organisaatiotasolla kehittämistutkimuksen metodein [54].

Ensimmäisiä opetusalan kehittämistutkimusta koskevia tutkimusartikkeleita julkaisivat Brown [16] ja Collins [21] vuonna 1992, jolloin menetelmää alettiin kutsua nimellä *design experiment*. Tutkimusmenetelmästä julkaistiin koko 1990-luvun aikana vain muutamia kymmeniä tutkimusartikkeleita, joista Brownin julkaisua tutkijoiden teoreettisista ja metodologisista ongelmista kehittää opetusta ja oppimista [16] pidetään kehittämistutkimuksen alkusysäyksenä [102]. Vuosituhannen vaihtuessa kiinnostus kehittämistutkimusta kohtaan lisääntyi ja nykyään menetelmää käytetään useissa opetuksen ja oppimisen tutkimuksissa.

Kehittämistutkimuksen englanninkielisiksi nimiksi ovat sittemmin vakiintuneet *design research* [62], *design based research* [132] ja *educational design research* [81]. Kaksi edellistä termiä liittyvät Suomessa usein opetuksen tutkimuksen lisäksi taiteen tutkimiseen ja kehittämiseen. Tutkimusmenetelmän suomenkielinen nimeäminen on tuottanut hankaluuksia ja menetelmää kutsutaan kehittämistutkimuksen lisäksi myös design-tutkimukseksi [54] sekä kasvatustieteelliseksi design- eli suunnittelututkimukseksi [64]. Käytän tässä tutkimuksessa menetelmästä nimeä kehittämistutkimus design-tutkimuksen liittyessä vahvemmin taiteeseen liittyvään muotoilututkimukseen.

Halu kehittää opetusta tutkimuspohjaisesti autenttisten luokkahuonetilanteiden tarpeisiin muotoutui kehittämistutkimukseksi vastauksena opetuksen tutkimukseen suuntautuneeseen kritiikkiin. Kritiikki kohdistui ensisijaisesti tutkijoiden kykenemättömyyteen tuottaa sellaista teoreettista tietoa, jota opettajat voisivat hyödyntää käytännössä opetuksensa kehittämiseen. Mikäli tutkijat painottivat tutkimusnäkökulman sijaan käytännönläheisyyttä, nousi puolestaan esiin huoli tutkimuksen tieteellistä luotettavuutta kohtaan. [115] Kehittämistutkimuksen päämääränä onkin yhdistää tutkimuspohjainen tieto käytännön keinoihin, jotta opettajilla olisi todellisia keinoja kehittää opettamistaan.

Tutkimusmenetelmänä kehittämistutkimus on monimuotoinen ja menetelmä voidaan määritellä tutkijasta riippuen usealla tavalla. Edelsonin [29] mukaan kehittämis-

tutkimusta voidaan pitää kehittämisen ja tutkimisen syklisenä menetelmänä, jossa yhdistyvät teoria ja kokeellisuus. Tyypillinen kehityskulku sisältää tutkimuksellisen otteen, tutkimusprosessin dokumentoinnin ja tutkimuksen yleistettävyyden vaiheet [29]. Lisäksi Barabin ja Squiren [9] mukaan kehittämisen laatua ylläpidetään pragmaattisten ratkaisujen avulla. Tällöin kehittäminen sekä pohjautuu teoriaan että luo uutta teoriaa. Myös Juuti ja Lavonen [54] pohjaavat kehittämistutkimuksen määritelmän pragmaattiseen lähestymistapaan, jossa toiminta ja teoria yhdistyvät opetusta kehittäväksi tiedoksi vuorovaikutuksen avulla.

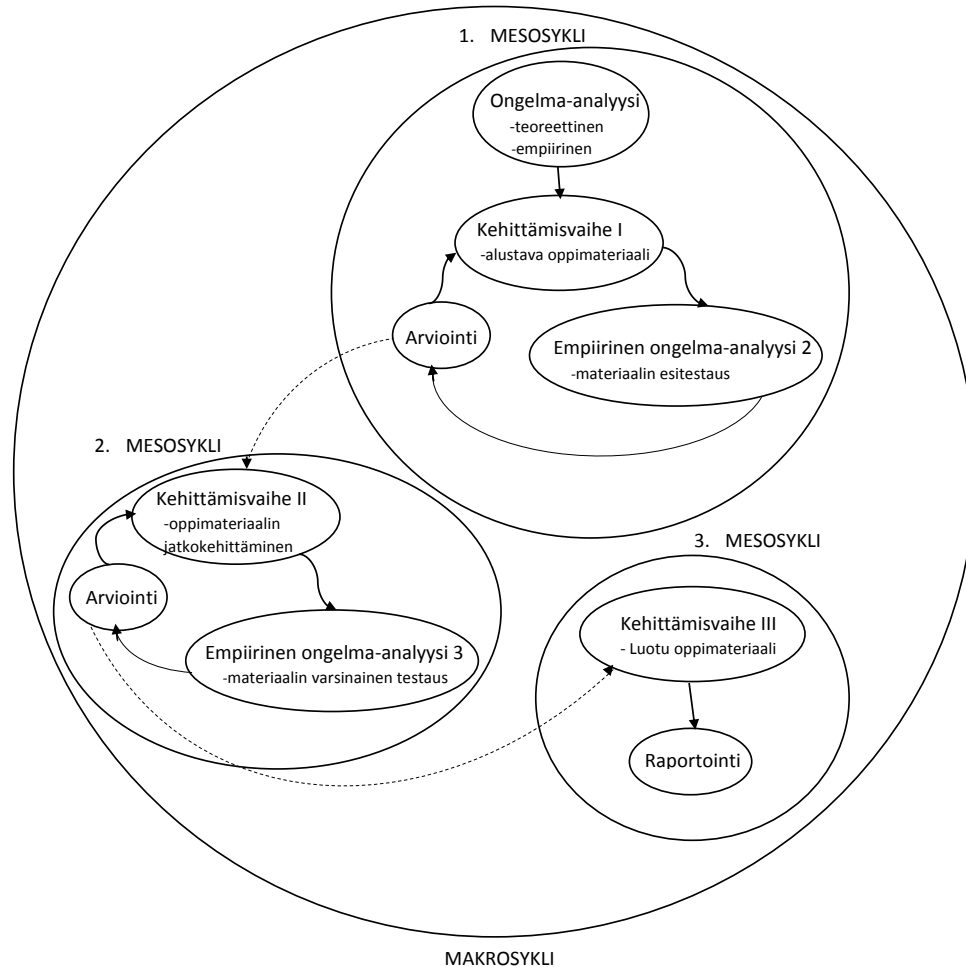
Tieteellisissä julkaisuissa on kehittämistutkimuksen määrittelyn ohessa pohdittu kehittämistutkimuksen ja toimintatutkimuksen suhdetta [6, 102]. Molemmissa tutkimusmenetelmissä olemassa olevan teorian pohjalta kehitetään uutta teoriaa arvioinnin ja asteittaisen kehittämisen pohjalta. Menetelmien erona voidaan Anderssonin ja Shattuckin [6] mukaan kuitenkin pitää tutkimustavoitteita, toteuttamistapoja ja tutkimuksen kokoluokkaa. Toimintatutkimuksessa tavoitteena on luoda ratkaisuja yksittäiseen tilanteeseen eikä uuden teorian muodostaminen ole olennaista prosessin aikana toisin kuin kehittämistutkimuksessa, jonka päätavoitteena on luoda yksittäisen tapauksen perusteella laajasti toimiva kehittämistuotos [102]. Tutkimusmenetelmät eroavat toisistaan myös taustaltaan, sillä kehittämistutkimuksen tausta on nimenomaan oppimisen ja opetuksen tutkimisessa [16].

Kehittämistutkimuksen ajatellaan erilaisista painotuksista huolimatta yleisesti sekä pohjautuvan teoriaan että tuottavan uutta teoriaa syklisessä, iteratiivisessa ja tarkkaan dokumentoidussa prosessissa, joka tulee toteuttaa luonnollisessa kontekstissa. Tutkimuksen päätavoitteena on aina mahdollisimman kokonaisvaltaisen ymmärryksen syntyminen tutkittavana olevasta ilmiöstä ja tutkimusmenetelminä voidaan käyttää useita kvalitatiivisia ja kvantitatiivisia menetelmiä. [28, 9, 132] Tämä tutkimus perustuu edellä kuvattuihin kehittämistutkimuksen määritelmiin tutkimuksen suunnittelun, käytännön toiminnan ja tutkimuksen yhteensovittamisen, havaittujen epäkohtien ratkaisemisen ja kehittämisen syklisen prosessin kautta.

2.2 Syklimallin vaiheet

Riippumatta kehittämistutkimuksen pohjalle valitusta toteutusmallista, kaikissa tutkimuksissa voidaan Edelsonin [28, 29] mukaan erottaa kolme osa-aluetta, jotka ovat *ongelma-analyysi*, *kehittämisprosessi* ja *kehittämistuotos*. Tämä tutkimus perustuu edellisen jaottelun lisäksi McKenneyn ja Reevesin [81] luomaan syklimalliin, jossa yksi iso makrosykli pitää sisällään mesosyklejä ja edelleen mikrosyklejä. Pääsykli, eli makrosykli, kuvaa koko kehittämisprosessin, ja kehittämisprosessin selventämiseksi makrosykli jaetaan pienempiin mesosykleihin. Mesosykleissä kuvataan kokonaisuuksina useamman mikrosyklin toiminnot. Mikrosyklit kuvaavat analyysin ja tutkimuksen, suunnittelun ja kehityksen sekä arvioinnin ja reflektoinnin ja näiden vaiheiden perusteella kehitystuotosta jatkokehitetään ja arvioidaan yhä uudestaan. Olen havainnollistanut tämän tutkimuksen syklistä etenemistä kuvan 2.1 avulla.

Aloitetaan kehittämistutkimuksen Edelsonin [28, 29] luokittelun mukaisesti ongelma-analyysillä eli tarveanalyysillä, sillä kehitystarpeen tulee pohjautua todelliseen, ai-



Kuva 2.1: Tämän kehittämistutkimuksen syklinen eteneminen mukailleen McKenneyn ja Reevesin [81] syklimallia. Tässä tutkimuksessa pääsykli, eli makrosykli, sisältää kolme mesosykliä, joissa kussakin on edelleen mikrosyklejä.

toon ongelmaan. Ongelma-analyysillä siis perustellaan tutkimuksen tarve ja tuodaan esiin tutkimuksen mahdollisuudet sekä haasteet. Analyysi voi olla luonteeltaan teoreettinen tai empiirinen tai näiden kahden yhdistelmä. Teoreettinen ongelma-analyysi perustuu taustakirjallisuuteen ja on teoreettisen viitekehyksen muodostamisen kannalta tärkeä vaihe tutkimustulosten ja kehitysprosessin peilaamisessa aikaisempiin tuloksiin. Empiirinen ongelma-analyysi perustuu havainnointiin sekä mittaamiseen. Kokonaisuudessaan ongelma-analyysi selkiyttää kehittämistavoitteita sekä antaa tutkimussuunnitelmalle alustavan rungon. [29, 60, 102] Kuvaan tämän tutkimuksen ensimmäisen mikrosyklin, eli teoreettisen ja empiirisen ongelma-analyysin, luvuissa 3, 4 ja 6.1, joissa tarkennan teoreettiseen viitekehykseen pohjaavia tutkimustarpeita sekä luon pohjan uuden oppimateriaalin kehittämiseksi.

Ongelma-analyysin jälkeen toteutan kehittämisprosessin, jonka kuvaan kokonaisuudessaan luvussa 6. Tässä tutkimuksessa kehittämisprosessi alkaa kehittämiskvai-

heella I (2. mikrosykli), jonka aikana kehitän alustavan version kehittämistuotoksesta ongelma-analyysissä esiin nousseiden huomioiden pohjalta. Kehittämisvaiheessa tähdätään ongelmakohhtien kehittämiseen ja lähtötilanteeseen nähden toimivamman ratkaisun löytymiseen. Muuttamalla ja kehittämällä kehittämistuotosta katsotaan, miten muutokset vaikuttavat lähtötilanteeseen. Koska kehittämistutkimus on luonteeltaan iteratiivinen, tulee alustavaa kehittämissuunnitelmaa muokata ja parannella kehittämistyön edetessä. [28, 102]

Ensimmäisessä kehittämisvaiheessa luotu alustava kehittämistuotos testataan mahdollisimman autenttisella kohderyhmällä empiirisessä ongelma-analyysissä 2. Jo kokeiluvaiheen aikana tapahtuu jatkuvaa kehittämistä ja tavoitteiden uudelleenasettelua havainnoimalla materiaalin toimivuutta käytännössä. Peilaan kehittämistuotoksen toimivuutta asetettuihin tavoitteisiin arviointivaiheessa, joka toimii pohjana seuraavalle kehittämisvaiheelle. Teoreettinen ja empiirinen ongelma-analyysi, ensimmäinen kehittämisvaihe sekä empiirinen ongelma-analyysi 2 muodostavat tämän tutkimuksen ensimmäisen mesosyklin.

Ensimmäisessä kehittämisvaiheessa muutokseen tähdänneiden toimenpiteiden testaamisen pohjalta jatkokehitän kehittämistuotosta edelleen kehittämisvaiheessa II toimivammaksi ja tavoitteita paremmin vastaavaksi tuotokseksi. Alustavan kehittämistuotoksen kokeiluvaiheen ja uudelleenkehittämisen aikana tarkastelen muun muassa kehittämistuotoksella saavutettuja tavoitteita ja nostan mahdolliset haasteet uusiksi tavoitteiksi. [60, 102] Empiirisessä ongelma-analyysissä 3 testaan jatkokehitettyä kehittämistuotosta autenttisessa ympäristössä sekä arvioin tulosten pohjalta kehitystuotoksen toimivuutta. Kehittämisvaihe II, empiirinen ongelma-analyysi 3 ja arviointi muodostavat tämän tutkimuksen toisen mesosyklin.

Kolmannessa mesosyklissä jatkan luodun oppimateriaalin kehittämistä kehittämisvaiheessa III. Kehittämissyklejä voidaan toteuttaa tutkimuksen laajuudesta riippuen useita, jolloin saadaan parannettua tutkimuksen luotettavuutta ja nostettua esiin uusia kehittämishaasteita [102]. Jatkuva kehittämistuotoksen arviointi ja ongelma-analyysien syventäminen sekä tuotoksien testaaminen vievät kehittämistutkimusta teoreettisten ja kokeellisten vaiheiden kautta kohti tutkimukselle asetettuja tavoitteita. Tämä kehittämistutkimus päättyy ajankäytön ja resurssien vuoksi kehittämisvaiheen III jälkeen raportointivaiheeseen eli pro gradu -tutkielmaan, jossa kuvaan koko kehittämistutkimuksen ja kehittämistyön pohjalta saadut tulokset.

2.3 Luotettavuus

Tieteellisten tutkimusten luotettavuutta voidaan yleensä mitata käsitteiden reliabiliteetti ja validiteetti avulla. Reliabiliteetilla tarkoitetaan tutkimustulosten pysyvyyttä ja validiteetilla pätevyyttä eli oikeiden asioiden tutkimista. [43] Kvalitatiivisessa kehittämistutkimuksessa näitä käsitteitä ei kuitenkaan voida hyödyntää samoin kuin kvantitatiivisia tutkimuksia tarkasteltaessa, sillä kehittämistutkimuksella on erilaiset vahvuudet ja tavoitteet perinteisiin empiirisiin tutkimuksiin verrattuna [28].

Perinteisesti kvalitatiivisessa tutkimuksessa hyödynnetään Lincolnin ja Guban [77] neliosaista luokittelua, jossa otetaan huomioon tutkimuksen uskottavuus, siir-

rettävyys, vahvistettavuus sekä luotettavuus ja varmuus. Kehittämistutkimuksen luotettavuutta tarkastellaan yhdessä edellä kuvatun luokittelun ja Design Based Research Collectiven [24] määrittelemien kehittämistutkimuksen kriteerien avulla. Luotettavan kehittämistyön tulee i) tuottaa kehittämistä ohjaavia malleja ja teorioita sekä kuvailevia teorioita, ii) kehittämisen pitää edetä syklisissä prosesseissa ja sisältää jatkuvaa kehittämistä ja arviointia, iii) tavoitteena tulee olla sellaisten teorioiden luominen jotka voidaan sellaisenaan ottaa opettajien käyttöön, iv) kehittäminen tulee tapahtua todellisissa opetustilanteissa ja v) tutkimuksen syklit tulee dokumentoida tarkasti [102].

Kehittämistutkimus pyrkii yleensä tuottamaan lähtötilanteeseen nähden muutoksen, jolla tähdätään kohti parempaa ja toimivampaa lopputulosta [102]. Näin ollen perinteisesti tieteellisessä tutkimuksessa arvostettu luotettavuuden mittari, pysyvyys, ei kehittämistutkimusta tehdessä anna viitteitä tutkimuksen toistettavuudesta tai pysyvyydestä. Tieteessä pyritään lisäksi yleistettävyyteen, joskin kvalitatiivisissa tutkimuksissa pyritään yleistyksien sijaan ensin ymmärtämään tutkittavaa ilmiötä, jonka jälkeen yleistämisen seurauksena tuotetaan teoriaa [43]. Kehittämistutkimusta onkin kritisoitu yleistettävyyden vaikeudesta laajojen tutkimusaineistojen aiheuttaman rajaamisen ja niiden raportoinnin hankaluuksien sekä tutkimustapahtuman ainutlaatuisuuden vuoksi [60, 102].

Kehittämistutkimuksen luotettavuutta on lisäksi kyseenalaistettu tutkimusprojektien koordinoinnin, teoriapohjan vahvistamisen ja tutkimusmenetelmien standardisoinnin suhteen objektiivisen ja puolueettoman analysoinnin haasteiden vuoksi [102]. Tutkimusmenetelmää kritisoinut Dede [23] ehdottaa luotettavuuden parantamiseksi hyödynnettävän kehittämistutkimuksen keinoja. Kritiikkiä kohdistuu myös tutkimusotoksen pieneen kokoon, jolloin saatuja tutkimustuloksia yleistettäessä havainnot saattavat olla virheellisiä. Engeström [30] kritisoi kehittämistutkimuksen syklisistä prosesseista huolimatta tutkimuksen lineaarisuutta, joka aiheuttaa tutkijoiden ja opettajien välille ristiriitoja kehittämisprosessin tavoitteiden toteutumisessa.

Vahvuutena kehittämistutkimuksella on konkreettisen tuotoksen syntyminen sekä siihen pohjautuvan teoreettisen taustan kehittyminen [29]. Barabin ja Squiren [9] mukaan kehittämisprosessista tekee luotettavan pienen mittakaavan ratkaisujen siirtäminen suureen mittakaavaan opettajien hyödynnettäväksi opetustilanteissa. Menetelmänä kehittämistutkimus on joustava ja antaa mahdollisuudet monipuoliseen työskentelyyn sekä kvantitatiivisten ja kvalitatiivisten menetelmien samanaikaiseen käyttöön [47].

Kritiikin kohteena olevien vakiintuneiden tutkimuskäytänteiden puuttuminen ja menetelmään kohdistuvien ratkaisemattomien kysymysten esiintyminen selittyvät tutkimusmenetelmän suhteellisen lyhyellä historialla [102]. Wang ja Hannafin [132] ovat pohtineet käytännön ja teorian välillä olevan tasapainon löytymistä ja Pernaa [102] puolestaan kysymystä siitä, miten vältetään tutkijan vaikutus kehittämisprosessin raportointiin. Kehittämistutkimus vakiinnuttaa asemansa tutkijoiden luomien käytänteiden ja kriittisten keskusteluiden siivittämien ongelmakohtien ratkaisujen myötä.

Kehittämistutkimuksesta saatava tieto kertoo ennen kaikkea opetuksesta ja oppimisesta, mutta myös kehittämisprosessista itsestään. Luotettavuuden tarkastelussa

kehittämisen prosessin tarkka dokumentaatio eli kaikkien tehtyjen valintojen ja näiden pohjalla olevien perusteluiden, lähtö- ja lopputilanteen, valittujen menetelmien sekä tulosten ja johtopäätösten aukottomien perusteluiden kirjaaminen ylös lisää kehittämistutkimuksen luotettavuutta. [28, 102]

Ylläpidän tämän tutkimuksen luotettavuutta syklisen ja iteratiivisten prosessien tarkalla dokumentoinnilla ja etenemisen kuvaamisella kohti tavoitteena olevaa uuden oppimateriaalin syntymistä. Jatkuva kehittäminen ja arviointi sekä materiaalin testaaminen autenttisella kohderyhmällä lisäävät tutkimusprosessin luotettavuutta. Olen noudattanut tutkimusta tehdessä tutkimuseettisiä periaatteita [127] tutkimusaiheen ja -menetelmien valinnasta kehitetyn materiaalin testaamiseen ja tulosten tarkasteluun. Erityisen tärkeää tutkimusetiikka on silloin, kun tutkimuksen kohteena ovat lapset, minkä olen ottanut huomioon tämän tutkimuksen toteutuksessa [8].

2.4 Tutkimukseen valitut metodit

Tämä kehittämistutkimus toteutetaan kvalitatiivisena ja empiirisenä tapaustutkimuksena. Kvalitatiivinen eli laadullinen tutkimus on menetelmäsuuntaus, jota voidaan toteuttaa monella eri lähestymistavalla, aineistonkeruu- ja analyysimenetelmällä. Yhteisenä piirteenä menetelmissä ovat tutkimuskohteena olevan ilmiön ymmärtäminen ja todellisen elämän kuvaaminen. [43] Sekalainen joukko teoriaperinteitä, tutkimusotteita ja analyysitapoja mahdollistavat kvalitatiivisen tutkimuksen tekemisen monenlaisista lähtökohdista käsin korostamalla havaintojen ja tulkintojen merkitystä [114]. Kvalitatiivisen tutkimuksen voidaan myös ajatella syntyneen vastinpariksi kvantitatiiviselle eli määrälliselle tutkimukselle, joskin molempia menetelmäsuuntauksia voidaan käyttää menestyksekkäästi samassa tutkimuksessa tutkimuskohteen kuvaamiseen [60, 114].

Tapaustutkimus pyrkii empiirisenä tutkimusmetodina löytämään autenttisista tilanteista vastaukset kysymyksiin miten ja miksi. Tapaustutkimukset voivat olla joko tutkivia, kuvailevia tai selittäviä ja tapauksia voi olla tutkittavana useita rinnakkain ja menetelminä voidaan käyttää niin kvalitatiivisia kuin kvantitatiivisia metodeja. [114, 20] Toteutan kehittämäni oppimateriaalin testaamisen kuvailevana tapaustutkimuksena, jolloin saan tietoa tutkittavan tapahtuman luonteesta. Tapaustutkimuksessa tavoitellaan taustalla olevan teorian laajentamista ja yleistämistä ja teoreettinen viitekehys toimiikin tutkimuksen suunnittelun tukena [114]. Tapaustutkimuksella on lisäksi vahva yhteys todellisuuteen aidon tutkimustilanteen myötä ja yhtenä tämän tutkimuksen tavoitteena on selvittää kehittämistuotoksen toimivuutta ja tutkia tavoitteiden saavuttamista autenttisessa luokkahuonetilanteessa. Pienelle kohderyhmälle hyvin soveltuva tapaustutkimus on toisaalta altis tutkijan vaikutukselle, mutta kehittämistutkimuksen ideologiassa tutkijan osallistuminen prosessiin on toisaalta tärkeää [20].

Keräsin tutkimukseni aineiston havainnoimalla oppilaiden toimintaa oppituntien aikana sekä havainnoimalla oppituntien videointeja. Myös oppilaiden keskinäiset ja oppilaiden ja tutkijaopettajan väliset keskustelut havainnoitiin. Sain lisäksi materiaalia tutkimusluokan luokanopettajan haastattelusta ja lyhyestä mielipidekyselystä,

johon oppilaat vastasivat viimeisen oppitunnin jälkeen. Tarkastelen mielipidekyselyn tuloksia pääasiallisesti kuvailevasti pienen otoskoon ($n = 24$) vuoksi. Litteroin videoilta oppilaiden ja tutkijaopettajan puheen sanatarkkuudella niiltä osin, mitkä sisälsivät oppitunnin aiheen kannalta oleellista tietoa. Havainnoin puheen lisäksi videoilta oppilaiden osallistumista ja suhtautumista annettuihin tehtäviin.

Sisällönanalyysiä pidetään yhtenä kvalitatiivisen tutkimuksen perusanalyysimenetelmistä, jonka avulla pyritään saamaan tiivistetty ja yleistetty kuva tutkittavasta kohteesta. Tutkimuskohteita voidaan analysoida systemaattisesti ja objektiivisesti järjestämällä aineisto sanalliseen muotoon tutkijan tekemiä johtopäätöksiä ja pohdintoja varten. [114, 124] Sanallisen kuvailun lisäksi sisällönanalyysi voidaan käsittää laajemmin myös sisällön kvantitatiiviseksi kuvailuksi eli sisällön erittelyksi [124]. Tarkoitan tässä tutkielmassa sisällönanalyysillä sekä sanallista että määrällistä kuvailua, ja käytän kyseistä menetelmää tutkimuksen empiirisessä oppikirja-analyysissä.

Analyysimenetelmäksi voidaan valita tutkimuksen lähtökohtien perusteella joko teorialähtöinen, teoriaohjaava tai aineistolähtöinen sisällönanalyysi [124]. Toteutin empiirisen oppikirja-analyysin aineistolähtöisellä sisällönanalyysillä, joka käsittää kolme vaihetta: pelkistämisen, ryhmittelyn sekä pää- ja alaluokkien muodostamisen. Ennen varsinaisen analyysin aloittamista määritellään analyysiyksikkö, jonka valintaan vaikuttavat aineiston laatu ja tutkimustehtävät. Analyysiyksikkö voi olla yksittäinen sana, lause tai virke. Pelkistämisvaiheessa analyysin kohteena oleva dokumentti pelkistetään karsimalla tutkimuksen kannalta epäolennaiset informaatiot pois joko tiivistämällä tai pilkkomalla osiin. Tämän jälkeen aineisto ryhmitellään etsimällä pelkistetystä aineistosta samankaltaisuuksia, jotka luokitellaan saman käsitteen alle. Viimeisessä vaiheessa ryhmittelyjen pohjalta muodostetaan käsitteitä pää- ja alaluokkiin. Ryhmien yhdistämistä jatketaan niin pitkälle kuin aineiston kannalta on mahdollista. [114, 124, 60]

Kvalitatiivinen kehittämistutkimus valikoitui tämän tutkielman tutkimusmenetelmäksi tutkimuksen päämääränä olevan toiminnallisen ja ongelmaoperustaisen oppimateriaalin kehittämisen vuoksi. Kehittämistutkimuksen syklinen ja iteratiivinen luonne soveltuvat oppimateriaalin kehittämiseen ja kuvaileva tapaustutkimus kehitettävän oppimateriaalin toimivuuden selville saamiseksi menetelmän soveltuessa hyvin tutkimuksen pieneen kohderyhmään ($n = 24$).

3 Mittaamisen suppea historia

Tässä tutkielmassa pituuden ja massan käsitteenmuodostus tapahtuu historiakatsauksen muodossa perusteluna mittaproseduurien ja -käsitteiden merkitykselle ja tärkeydelle. Mittaamisen historian tunteminen ja yhtenäisen yksikköjärjestelmän vaiheikkaan kehittymisen ymmärtäminen antavat konkreettisia välineitä mittaamisen opettamiselle. Vuosisatoja kestäneen mittaamisen kehityskaaren hyödyntäminen pituuden ja massan opetuksessa antaa luontevan perustelun nykyisille standardimittojen käytämiselle ja konkreettinen tekeminen sekä toiminnallisuus saavat vankan perustelun historiasta.

Kysymykseen, mitä mitat ja mittaaminen ovat, on etsitty vastauksia pääasiassa kahdesta eri lähtökohdasta. Huomiota on kiinnitetty sekä mittayksiköiden toimivuuteen, kuten Einsteinin suhteellisuusteoriassa tai Heisenbergin epätarkkuusperiaatteessa, että mitan käsitteen matemaattisiin piirteisiin erilaisten mittateorioiden puitteissa (mm. [91] ja [100]). Tieteenfilosofian sanakirjassa *A Companion to the Philosophy of Science* esitetyn mitan määritelmän suomennoksen mukaan "Mittaaminen on tieteen keskeistä tiedollista toimintaa, joka yhdistää jonkin luvun ja jonkin määrän yrittäessä arvioida kyseessä olevan kvantiteetin suuruutta" [100] Mittaamalla siis tutkitaan, kuinka monta kertaa jokin mittayksikkö sisältyy mitattavaan kohteeseen. Mittaluvun eli saadun tuloksen suuruus riippuu mittayksikön koosta: mitä pienempi mittayksikkö, sitä suurempi on mittaluku. SI¹-järjestelmän mukaisia mittasuureita, joiden käytöstä ja oikeellisuudesta huolehtii Ranskassa sijaitseva kansainvälinen mittavirasto BIPM², käytetään nykypäivänä lähes maailmanlaajuisesti [13].

Lähes kaikkea ympärillämme olevaa mitataan tavalla tai toisella. Vallitseviin mittoihin ja käytäntöihin ollaan kuitenkin niin tottuneita, ettei mittaamisen käsitettä juuri mietitä, liittyipä mittaaminen arkisiin tilanteisiin tai tiedemaailman käytäntöihin. Oikeastaan nyky-yhteiskunnan toiminta perustuu erilaisiin mittareihin ja mittauksiin, kun reaali maailmaa kuvataan luvuilla ja taulukoilla: ihminen on itsekin monenlaisten mittojen ympäröimänä syke- ja verenpainemittareista painoindekseihin. Mittaaminen on siis kiistatta yksi empiirisen luonnontieteen perusmenetelmistä, jonka avulla reaali maailman tapahtumia voidaan kuvata luvuilla. Alkujaan mittaamisen kehittyminen vaikutti osaltaan matematiikan kehittymiseen liittämällä lukuja fysikaalisiin kohteisiin mahdollistaen samalla asioiden vertailun. Mitat ja mittaaminen kehittivät jo varhain yhteiskuntien käsitystä maailman rakenteesta ja hahmottivat uudella tavalla esimerkiksi ajan kulumista ajatusten perustuessa oppeihin kosmologiasta [86].

Seuraavissa kappaleissa käsittelem mittaamisen historiaa pääasiassa antiikin filosofien Platonin ja Aristoteleen, 1600-luvulla vaikuttaneen Galileo Galilein ja 1800-luvulla tapahtuneen mittajärjestelmien yhtenäistymisen näkökulmista. Valitut ajanjaksot ovat olleet merkittäviä mitan käsitteen ja mittaamisen kehittymisen kannalta ja jako noudattelee pitkälti tieteen historiassa yleisesti käytettävää jaottelua antiikkiin, renessanssiin ja 1800-luvun uuteen aikaan.

¹*Système International d'Unités*

²*Bureau International des Poids et Mesures*

3.1 Antiikin ajoista Galileo Galileihin

Antiikin filosofit Platon ja Aristoteles käsitelivät kumpikin mittoja ja mitan käsitettä kirjoituksissaan, joiden perusteella muotoutui varhainen filosofinen käsitys mitoista ja mittayksiköistä [100, 91]. Platon jaotteli mittaamisen kahteen eri taitoon: teoreettiseen ja absoluuttiseen sekä käytännölliseen ja suhteelliseen. Käytännöllisen mittaamisen ajateltiin olevan ominaista tavallisille ihmisille, joiden mittauksissa yksiköt ja mitattavat asiat olivat vaihtelevia ja sidoksissa mittaajaan. Filosofien ajateltiin sen sijaan käsittelevän mittoja absoluuttisella tarkkuudella kaiken perustuessa kosmoksen rakenteeseen ja näin Platon erotti tieteessä toisistaan luulon ja tiedon. [107] Platonin mitta siis perustui ikuiseen ja muuttumattomaan kosmokseen, siihen kuinka asiat järjestyvät ja mikä niiden paikka on maailmassa.

Aristoteles puolestaan käsiteli mittaamista konkreettisemmista lähtökohdista yksiköiden ja suhteiden kautta. Tärkeitä käsitteitä olivat mittayksikkö, yksi ja jakamaton, jotka liittyivät mittaamisen lisäksi luvun käsitteeseen. Koska mittaamisessa käytettiin tiettyä mittayksikköä, jonka ajateltiin olevan jakamaton, oli olemassa monia eri "yksiä" eri asioiden mittaamista varten. [7] Näin ollen käsityöläinen ja matemaatikko saattoivat käyttää omiin mittauksiinsa sopivia yksiköitä samanarvoisina, toisin kuin Platonin ajatuksissa, joissa filosofien mittaustaidot olivat korkeammalla tasolla kuin tavallisten ihmisten. Käsitteellisesti mitta oli siis yksi jakamaton yksikkö, jossa jakamattomuudella tarkoitettiin kvantitatiivisen pienimmän yksikön olemassaoloa ja pienimmäksi yksiköksi valittiin sellainen pienin mahdollinen ero, joka pystyttiin aistien havaitsemaan [100]. Aristoteles liitti mittaamiseen ehdon mitan ja mitattavan samansukuisuudesta ja määritteli näin säännöt sille, mitä voidaan mitata ja miten [100, 91].

Seuraava suuri kiinne kohta mittaamisen historiassa on Galileo Galilein käsitys mittaamisesta osana tietoa tuottavaa luonnontutkimuksen menetelmää [100]. Mittaaminen sai aiemmin vallalla olleen ontologisen näkökulman sijaan uuden merkityksen luonnon tutkimisena, kun 1600-luvulla paikkansa vakiinnuttanut valistuksen ajan luonnontiede hylkäsi antiikin filosofien ajatukset harmonisesta kosmoksesta mitan käsitteen perustana. Galileon katsotaan tuoneen matematiikan osaksi fysiikkaa, ja mittaamisen osaksi tiedekäytänteitä. Mitta liittyikin ennemmin tieteelliseen menetelmään suhteita ilmaisevana käsitteenä kuin kosmoksen absoluuttiseen järjestykseen [26, 100]. Galilei määritteli tiedon syntyvän aistihavaintoihin perustuvien mittausten ja kokeiden tuloksista, joista voitiin johtaa luonnon sisältämiä matemaattisia säännönmukaisuuksia [32]. Näiden säännönmukaisuuksien ja niiden sisältämien matemaattisten totuuksien etsiminen johti Galilein tutkimaan muun muassa kappaleiden putoamisnopeuksia [27]. Koska luonto oli muuttuva ja suoritettavat kokeet epätasallisia ja epätarkkoja toisin kuin puhtaan matematiikan osoittamat ennusteet, joutui Galilei pohtimaan kuinka luonnon sisältämiä säännönmukaisuuksia voitiin kuvata matemaattisesti tosina. Väliaineen vastuksesta aiheutuva erimassaisien kappaleiden eriaikainen putoaminen johdatti Galileo Galilein ajatuskokeeseen, jossa kappaleita tutkittaisiin tyhjiössä. Ajatuskoe johti vapaasti putoavien kappaleiden liikelain syntymiseen [88, 32, 67]. Putoamiskoe suoritettiin Kuun pinnalla Galilein ajatuskokeen innoittamana vuonna 1971 vasaran ja höyhenen avulla. Koejärjestelystä kuvattu

video on nähtävillä Nasan sivuilla [87].

1600-luvulla matematiikan ja kokeellisuuden yhdistäminen vaati ilmiöiden yksinkertaistamista ja niiden tarkkoja matemaattisia esityksiä, jolloin nousivat esiin ensi- ja toissijaiset kvaliteetit. Ensisijaisina kvaliteetteina pidettiin kohteeseen itsessään kuuluvia ominaisuuksia, kuten liike, lukumäärä, muoto ja koko. Toissijaiset kvaliteetit olivat subjektiivisia kokemuksia, jotka voitiin johtaa ensisijaisista kvaliteeteista. Toissijaisia kvaliteetteja olivat esimerkiksi väri, maku ja haju, joiden ajateltiin olevan olemassa vain havaitsijan tietoisuudessa, ei kappaleissa itsessään. Mitan käsitteen merkitys muuttui kokeellisuuden ja käytännön tarpeiden myötä, kun mitat yleistettiin ja välineellistettiin, eikä mitan ja mitattavan samansukuisuudella ollut enää rajoittavaa merkitystä. [100]

3.2 SI-järjestelmän syntyminen

Nykyään vanhin tiedossa oleva painomitta on peräisin Babyloniasta, jossa massan mittaamiseen käytettiin erikokoisia punnuksia. Mittayksikkö oli nimeltään *mina*, mutta mittayksikön olemassaolo ei suinkaan vielä tarkoittanut mitan yleistettävyyttä, vaan yksikkö vaihteli alueellisesti muun muassa kreikkalaisten, egyptiläisten ja foinikialaisten keskuudessa. [91] Usein viereisten kylien tai jopa naapureiden mitat eivät olleet vertailukelpoisia keskenään, puhumattakaan eri valtioiden käyttämisestä mittoista. Poikkeuksellisesti Egyptissä kuitenkin käytettiin pyramidien rakentamiseen saman pituiseksi määriteltäviä pituusmittaa koko valtakunnassa jo 2700 eaa., jolloin mitan pituus määräytyi vallassa olevan faaraon käsivarren pituudesta sormenpäistä kyynärpäähän mitattuna. Yleisesti ihmisen eri ruumiinosia käytettiin mittaamisen apuna, jolloin mittayksiköt olivat pääasiassa käytössä vain pienellä alueella paikallisesti. Esimerkiksi antiikin Kreikassa käytettiin luovia mittoja: sormenleveyksiä, stadionmittoja ja rahapainoja. Ihmisen kehon mittoja hyödynnettäessä mittaustulokset olivat riippuvaisia siitä, kenen jalan tai käden mukaan mittaukset suoritettiin. [91, 100] Ihmiskehon lisäksi pituusyksiköitä johdettiin muun muassa siementen ja jyvien mittoista: 1300-luvun Englannissa tuuman määritelmä oli "*kolme graania kiviä ja pyöreitä ohranjyviä asetettuna pituussuuntaisesti peräkkäin*" [65].

Yhteiset mittayksiköt syntyivät vasta 1700-luvun lopulla teollistumisen myötä, kun Ranskassa esiteltiin uusi, desimaaleihin perustuva mittajärjestelmä [12]. Ennen metrijärjestelmän kehittämistä käytössä olleet paikkakuntaikohtaiset mittaussjärjestelmät koettiin teollisuuden kehittymisen jälkeen hidasteiksi ja ongelmiksi, joten tehokkuuden ja yksinkertaistamisen vuoksi tiedemiehet suunnittelivat kaikille yhteisen, universaalin mittajärjestelmän [100]. Tarve konkreettisille ja yhteneväisille mitoille oli suuri tiedemaailman lisäksi myös kaupankäynnin ja politiikan saralla [22]. Uusi järjestelmä pohjautui *metriin*, jonka pituudeksi määriteltiin konkreettisiin mitauksiin perustuen vuonna 1791 kymmenesmiljoonasosa Maan ympärysmitan neljänneksestä [111]. Mittajärjestelmän käyttöönotto ei kuitenkaan sujunut Ranskassa suunnitelmien mukaan, vaan vanhojen mittojen käyttö hyväksyttiin uuden rinnalla vielä koko 1830-luvun ajan [5]. Nykyään vain Yhdysvallat, Myanmar ja Liberia ovat jättäytyneet pois metrisopimuksesta muotoutuneesta SI-järjestelmästä, joka sai ny-

kyistä vastaavan muotonsa vuonna 1960 [122]. Toisaalta edelleen käytetään virallisten SI-yksiköiden ohella myös muita yksiköitä, kuten moottoreiden tehoa ilmaisevaa hevosvoimaa, vesistöihin liittyvää meripeninkulmaa ja ilmailussa käytössä olevia jalkoja ja solmuja.

Vuonna 1960 kokoontuneessa paino- ja mittakonferenssissa CGPM muotoutunut kansainvälinen mittayksikköjärjestelmä SI, sisälsi metristä riippuvaiset perusyksiköt kilogramman, sekunnin, ampeerin, kelvinin ja kandelan. Vuonna 1971 mittajärjestelmään otettiin mukaan seitsemänneksi perussuureeksi ainemäärää mittaava mooli. [122] Nykyisin tärkeimpänä yksikkönä voidaan pitää sekuntia, joka on täysin riippumaton muista mittayksiköiden määritelmistä. SI-järjestelmään kuuluvat seitsemän perusyksikön lisäksi niistä johdetut lukuisat johdannaisyksiköt, kuten tilavuus ja pinta-ala. Järjestelmä kehittyy jatkuvasti yhä parempien ja tarkempien mittaustulosten mahdollistamiseksi ja SI-järjestelmän kaikki perusyksiköt pyritään lähitulevaisuudessa määrittelemään luonnonvakioiden avulla. Metrin, sekunnin ja kandelan määritelmät pysyivät muuttumattomina pohjautuen jo ennestään luonnonvakioihin. Sen sijaan kelvin, kilogramma ja kilogrammasta riippuvat mooli ja ampeeri pyritään määrittelemään neljän luonnonvakion avulla: Planckin vakion h , alkeisvarauksen e , Avogadron vakion N_A ja Boltzmannin vakion k_B . [12, 122, 13] Mikäli uudet määritelmät ja mittaukset todetaan ristiriidattomiksi, perusyksiköiden määritelmät voitaneen hyväksyä vuonna 2019, kun paino- ja mittakonferenssi kokoontuu seuraavan kerran.

Desimaalijärjestelmään perustuva mittaaminen poikkesi aikaisemmin käytössä olleista järjestelmistä siinä, että ihmisen kehon mittojen sijaan ensimmäisissä metriin perustuvissa mittauksissa hyödynnettiin Maan mittoja [5]. Pituuden mittaamisen yksikkö saatiin Maan ympärysmitan (40075 km) neljänneksen (10019 km) kymmenesmiljoonasosasta 1,0019 m eli $1/10000000$ pohjoisnavan ja päiväntasaajan välisestä etäisyydestä [100]. Koska Maan ympärysmitan neljänneksen määrittäminen oli aikaa vievää ja vaikeaa, valmistettiin metristä vuonna 1799 konkreettinen ja pysyvä platinaprototyyppi, johon mittajärjestelmä perustui ideaalisen Maan ympärysmitan sijaan [111]. Lähes sata vuotta myöhemmin laajalle levinneen metrijärjestelmän toiminnan varmistamiseksi perustettiin Ranskan Sèvresiin Kansainvälinen paino- ja mittatoimisto BIPM [12]. Samoihin aikoihin valmistettiin metrin ja kilogramman uudet, entistä tarkemmat prototyypit platina-iridiumseoksesta, jolloin metrin mitassa päästiin jo tarkkuuteen $\pm 0,002$ mm. Prototyypin heikkoutena oli kuitenkin tarkan mittatuloksen saamiseksi mittauksen suorittaminen nollan asteen lämpötilassa [12]. Ensin kryptonin aallonpituuden ja sitten valonnopeuden avulla tarkennettujen metrin mittojen jälkeen nykyisin käytössä oleva mitta on laskettu parannellulla valonnopeuden mittaamisella, ja mittausvirhe on enää $\pm 0,00000002$ mm [111]. Nykyisin metri siis määritellään valon kulkemaksi matkaksi tyhjiössä $1/299792458$ sekunnissa, eli toisin sanoen valo kulkee tyhjiössä 299 792 458 metriä yhdessä sekunnissa [122]. Metrijärjestelmän alkuvaiheessa metristä johdettiin toinen perusyksikkö *gramma*, eli kuutiosenttimetrin suuruinen, lämpötilaltaan 4°C vesimäärän massa. Metrin ja gramman avulla määriteltiin lisäksi tilavuus sekä pinta-ala. [12]

Nykyään massan yksikön *kilogramman* määritelmä perustuu Ranskassa säilytettävään kansainväliseen prototyyppiin, joka on valmistettu iridiumin ja platinan seoksesta. Prototyyppi on korkeudeltaan ja läpimitaltaan 39 millimetriä oleva sylin-

teri. [12] Suomi sai oman massaprototyypinsä vuonna 1890 ja kopiota on verrattu alkuperäiseen vuosina 1889, 1948, 1985, 1990 ja 2001. Koska ilman epäpuhtaudet kasvattavat prototyypin massaa, muuttuu kilogramman määritelmä ajan saatossa. [122]

SI-järjestelmän allekirjoittaneita jäsenvaltioita on tällä hetkellä 57 [13], joiden edustajat muodostavat SI-järjestelmän perusyksiköiden ja määritelmien vahvistavan paino- ja mittakonferenssin CGPM:n [122]. Suomi otti metrijärjestelmän käyttöön vuonna 1886 ja sai kansalliset mittanormaalit haltuunsa vuonna 1890. Osaksi kansainvälistä metrisopimusta Suomi liittyi vuonna 1921, mutta järjestelmän laaja käyttö tapahtui vasta viisikymmentä vuotta myöhemmin. [122] Nykyään Mittatekniikan keskus (MIKES) vastaa Suomessa SI-järjestelmän ylläpidosta ja toimivuudesta [85]. Yhtenäinen mittajärjestelmä kehitettiin varsin myöhään, eikä nyky-yhteiskunta pyörisi ilman yhteneviä mittayksiköitä totuttuun tapaan. Näin ollen mitan käsitteet ja mittaproseduurit kuuluvat oikeutetusti tärkeäksi, joskin vaikeaksi koetuksi aihealueeksi koulumatematiikassa.

4 Mittaaminen osana Solmu-ohjelmaa

Tämän tutkimuksen teoriatausta pohjautuu luokanopettaja (KM) Maarit Laitisen Tampereella kehittämän lähestymistavan, Solmu-ohjelman, teoreettiseen taustaan. Alun perin Solmu-ohjelma luotiin tuen tarpeessa olevien oppilaiden matemaattisten taitojen yksilöllisen oppimisprosessin tukemiseksi ja kokeiluvuosien 2011–2013 jälkeen ohjelma laajeni koko luokan opetustavaksi osana Luma-Suomi 2014–2019 kehittämisohjelmaa Tampereella ja Hämeenlinnassa. Solmu-ohjelma perustuu käsitteenmuodostuksen ja laskemistoimintojen rinnakkaisen vahvistamisen lisäksi vahvaan visualisointiin. Luvun käsitteen muodostumisen ymmärtämisellä pyritään peruslaskutaitojen vahvistamiseen sekä sujuvaan ja joustavaan laskutaitojen käyttämiseen. Käsitteellinen ymmärtäminen on vahvasti läsnä opetuksen alusta alkaen ja oppimisessa hyödynnetään matematiikan kielentämistä eli koodinvaihtoa luonnollisen kielen, matemaattisen kielen, kuviokielen ja taktiilisen toiminnan kielen välillä. Luvun käsitettä hahmotetaan materiaalin avulla, joka mahdollistaa lukujen näkemisen, kuulemisen ja koskettamisen. [74]

Seuraavissa kappaleissa tutustutaan matemaattisen tiedon duaaliseen luonteeseen ja selvitetään, millaisia haasteita konseptuaalisen ja proseduraalisen tiedon eri alueiden kehittyminen tuovat pituuden ja massan oppimiseen. Lisäksi tarkastelen toiminnallisen ja ongelmaperustaisen oppimisen tuomia mahdollisuuksia mittaamisen oppimisessa sekä pohdin matematiikan kielentämistä yhtenä oppimisen ja osaamisen arvioinnin välineenä.

4.1 Matemaattisen tiedon duaalisuus

Matemaattisen tiedon kehittymiselle on luotu useita teorioita, joista tässä tutkielmassa keskityn tiedon duaalisen luonteen määrittelyyn. Matemaattisen tiedon ajatellaan jakautuvan kahtia proseduraaliseen (*procedural knowledge*) ja konseptuaaliseen tietoon (*conceptual knowledge*) [41, 116, 33, 35]. Proseduraalinen tieto eli menetelmätieto keskittyy vastaamaan kysymykseen miten, kun konseptuaalisessa eli käsitetiedossa etsitään vastausta kysymykseen miksi [75]. Jotta matematiikan syvälinen ymmärtäminen ja vahva osaaminen olisivat mahdollisia, tulee näiden kahden tiedonalueen yhdistyä toisiinsa toimiviksi tietorakenteiksi [116, 118]. Koska jako proseduraaliseen ja konseptuaaliseen tietoon ei yksiselitteisesti kata kaikkea matemaattista tietoa [41], on Joutsenlahti [50] nimennyt matemaattisen tiedon kolmanneksi osaluueksi strategiatiedon. Strategiatietoon sisältyvät esimerkiksi ongelmanratkaisussa tai todistamisessa tarvittavat strategiat.

Konseptuaalisena tietona pidetään Hiebertin ja Lefevren [41] mukaan sellaista tietoa, jonka yhteydet muihin tietorakenteisiin ovat tiedostettuja ja ymmärrettyjä ja jota osataan käyttää ja soveltaa useassa asiayhteydessä ymmärtäen samalla tiedon ja tiedon käytön yhteydet toisiinsa. Käsitetiedolle on ominaista linkittyneisyys tiedon vahvistuessa ja lisääntyessä aiemmin opittujen käsitesuhteiden välillä ja uuden tiedon rakentuessa jo olemassa olevien tietorakenteiden varaan. Konseptuaalisen tie-

don ajatellaankin olevan irrottamaton osa suhdeverkkoa, eikä tietoa voida käsitellä erillisenä muusta tietorakenteesta. [41, 116]

Konseptuaalisen tiedon muotoutuminen voi tapahtua kahdella eri abstraktiotasolla. Primaarisella tasolla (*primary level*) tiedon eri osien välinen suhde on samalla tai alemmalla abstraktiotasolla kuin se informaatio, jonka suhde yhdistää. Reflektioivalla tasolla (*reflective level*) tieto ei enää ole sidoksissa kontekstiin ja suhteet voivat rakentua abstraktimmalla tasolla kuin yhdistettävä informaatio. [41] Kadijevichin ja Haapasalon [57] määritelmässä konseptuaalinen tieto koostuu toisiinsa liittyvistä käsitteistä ja proseduureista, joiden muodostama semanttinen verkko riippuu sekä objektiivisesta tiedosta että subjektiivisista konstruktioista. Sfardin [116] mukaan käsitetieto on strukturaalista tietoa, jossa ongelman ratkaiseminen vaatii strukturaalista toimintaa eli pysyvän objektin käsittelemistä kokonaisuutena. Strukturaalinen tieto vastaa käsitettä konseptuaalinen tieto, ja molempia käytetään tässä yhteydessä käsitetiedon määrittelyssä.

Proseduraalinen tieto jakautuu taitoon osata käyttää matematiikan symbolikieltä ja taitoon käyttää ja soveltaa erilaisia sääntöjä, algoritmeja ja ratkaisuproseduureja [41]. Matemaattisten symbolien ja merkintätapojen sujuva käyttö sekä kyky tunnistaa vääränlaiset ja merkityksettömät merkintätavat kuuluvat proseduraalisen tiedon ensimmäiseen osa-alueeseen. Menetelmätiedon ratkaisualgoritmien käyttäminen noudattaa usein askel askeleelta etenevää polkua, eikä haluttuun lopputulokseen pääseminen vaadi sisällön ymmärtämistä. [41, 116] Gray ja Tall [33] sekä Sfard [116] pitävät proseduraalista tietoa välttämättömänä, muttei riittävänä ehtona konseptuaalisen tiedon rakentumiselle toisin kuin Hiebert ja Lefevre [41], joiden mukaan proseduraalinen tieto on riittävä ehto strukturaaliselle tiedolle. Kadijevich ja Haapasalo [57] määrittelevät proseduraaliseksi tiedoksi määrättyjen sääntöjen, algoritmien ja proseduurien tarkoituksenmukaisen ja dynaamisen käytön tiedostamalla käytetyt syntaksit ja esitysmuodot. Kieranin [63] mukaan proseduraalinen tieto on aritmeettisten operaatioiden käyttämistä matemaattisten ongelmien ratkaisemisessa ja Sfard [116] määrittää proseduuriksi sellaisen tiedon, jonka luonne paljastuu vasta tehtyjen toimintojen jälkeen, jolloin tietoa voidaan pitää luonteeltaan dynaamisena ja jononaisena.

Usein koulussa mitataan vain proseduraalista tietoa sen yksinkertaisen arvioinnin vuoksi, jolloin oppijan käsitteellisen ymmärryksen taso jää selvittämättä. Proseduureja on mahdollista opetella ulkoa ja oppia hyvinkin taitavaksi mekaaniseksi laskijaksi, mutta ilman käsitetiedon kehittymistä oppiminen jää matalalle abstraktiotasolle [75]. Sen sijaan, että käsitetietoa ja menetelmätietoa käsiteltäisiin erillään toisistaan, painottaa Sfard [116] näiden kahden tiedon yhdistymistä matemaattisen osaamisen perustana. Menetelmätietoa voidaan kuitenkin oppia irrallisena opittavan asian käsitteestä, jolloin proseduurit hallitaan ymmärtämättä kuitenkaan täysin sitä, mitä oikeastaan ollaan ratkaisemassa. Käsitetietoa ei sen sijaan voida järkevästi irrottaa erilleen proseduureista, sillä käsitetieto menettää tällöin merkityksensä. [116, 33, 75] Käsitteenmuodostusprosessissa matematiikan proseduraalinen ja konseptuaalinen luonne vahvistavat toisiaan, jota kuvaamaan Gray ja Tall [33] ovat luoneet käsitteen *procept*. Sanan alkuosa tulee prosessista *process* ja loppuosa käsitteestä, *concept*. Myös Silfverberg [118] toteaa matemaattisen ymmärryksen ra-

kentuvan tasapainoisesta, kahden rakenteeltaan erityyppisen tiedon sisäistämisestä ja yhdistämisestä. Matematiikan symbolikielellä kuvattu merkintä mahdollistaa sekä proseduraalisen että konseptuaalisen tulkinnan, sillä merkintä $1\text{ cm} + 1\text{ cm}$ voidaan ajatella proseduraalisesti laskutoimituksena tai toiminnan lopputuloksena konseptuaalisesti lukuna $1\text{ cm} + 1\text{ cm}$. Kun pystytään muodostamaan molemmat tulkinnat yhtä aikaa, on kyseessä *procept*.

Matemaattisen tiedon rakentuminen ja kehittyminen on Sfardin [116] mukaan käsitteellinen muutosprosessi, jossa matematiikan käsitteet ymmärretään hierarkkisesti eri tasoilla proseduraalisesti prosessina ja strukturaalisesti objektina. Käsitteen ymmärtäminen prosessina on matemaattisen ymmärtämisen alin taso, jolloin seuraava hierarkiataso saavutetaan objekteihin kohdistuvien prosessien kehittyessä hiljalleen uusiksi objekteiksi abstraktiotason samalla kohotessa [42]. Siirtymistä hierarkiata-solta seuraavalle eli prosessia, jossa jokin toiminto saa itsenäisen objektin luonteen, kutsutaan Sfardin mukaisesti objektifionniksi [116]. Objektifiointi pitää sisällään kolme vaihetta, jotka ovat sisäistäminen (*interiozation*), tiivistäminen (*condensation*) ja reifikaatio (*reification*). Ensimmäisessä vaiheessa oppija sisäistää alemman abstraktiotason objekteihin liittyvät toiminnot, jolloin ne tulevat ymmärrettäviksi ja toimintojen käyttäminen onnistuu yksinkertaisissa tilanteissa ja ideatasolla myös kuvitteellisesti. Tiivistämisellä tarkoitetaan kykyä hahmottaa monivaiheiset operaatiot osatoimintoineen itsenäisinä kokonaisuuksina. Reifikaatiovaiheessa toiminnot symboloidaan objekteiksi, joihin seuraavan hierarkiata-sason operaatiot voivat jälleen kohdistua. Reifikaatiossa käsitteet siis muodostuvat matemaattisiksi objekteiksi, jolloin alemman tason reifikaatioprosessi ja seuraavan abstraktiotason objektin sisäistämisprosessi riippuvat toinen toisistaan. [116] Mikäli kehitys proseduraalisesta ajattelusta kohti strukturaalista katkeaa, katoavat symbolien ja toimintojen yhteydet alemman hierarkiata-sason struktuureihin ja matematiikan oppiminen muuttuu ulkoa opetteluksi. Siirtymäkohdat muodostuvatkin usein oppimisen solmukohdiksi [83]. Vastaavasti Hiebert ja Lefevre [41] määrittelevät käyttäjälleen merkityksellisten proseduurien olevan yhteydessä konseptuaaliseen tietoon, jolloin proseduurit muodostuvat osaksi tietoverkkoa ja ovat osana käsitteenmuodostusprosessia. Proseduraalisen ja konseptuaalisen tiedon yhdistyminen vahvistaa käsitteiden ymmärrystä ja helpottaa matemaattisten ongelmien ratkaisemista antaen laajemmat ja monipuolisemmat välineet ratkaisun muodostumiseksi.

Silverberg [118] pitää Sfardin mallia matemaattisen ymmärryksen kasvusta yhtenäisenä van Hielen perushypoteesien kanssa. van Hielen geometriaan liittyvien hypoteesien mukaan geometrisen ajattelun kehitys ei ole jatkuvaa, vaan sisältää peräkkäisiä van Hielen tasoja, joiden järjestys on vakio. Korkeammalle tasolle siirtyminen vaatii edeltävillä tasoilla kehittynyttä ymmärtämistä ja jokaisen tason implisiittinen ajattelu muuttuu seuraavalla tasolla eksplisiittiseksi. Jokaisella van Hielen tasolla on ominaiset symbolit ja niiden välinen suhdeverkosto ja eri tasoilla olevien rakenteiden välillä on ymmärryskuilu. Näin ollen mikäli opetus tapahtuu ylemmällä tasolla kuin oppilaan ajattelu on, ei opetusta sisäistetä kunnolla. [118] Sfardin teorian ja van Hielen tasojen väliltä löytyy yhteneväisyyksiä ja molemmat teoriat pitävät sisällään ajatuksen oppimisprosessin epäonnistumisesta opetuksen tapahtuessa eri tasolla kuin oppilaan ajattelu, joskin Sfard on kohdistanut tutkimuksensa algebraan ja van Hiele

geometriaan.

Tutkimusten mukaan (mm. [82]) proseduraalisen tiedon ymmärtäminen on helpompaa kuin konseptuaalisen tiedon omaksuminen, sillä konseptuaalinen tieto koetaan haastavammaksi saavuttaa abstraktimman luonteensa vuoksi. Proseduurien hallitseminen ilman käsitteiden ymmärtämistä ei kuitenkaan yksinään riitä matemaattisen tiedon syventymiseen, vaikka onkin tärkeä perusta ymmärryksen kehittymiselle [116]. Matemaattisen tiedon konseptuaalisten ja proseduraalisten komponenttien välillä olevat ristiriidat ovat aiheuttaneet haasteita mittaamisen oppimiseen.

4.2 Mittaamisen oppimisen haasteet

Mitan käsitteiden ymmärtämisen ja mittaproseduurien hallitsemisen haasteita on tutkittu useissa kansainvälisissä tutkimuksissa Piaget'n 1960-luvulla julkaistuista geometrian tutkimuksista lähtien [117]. Piaget'n mukaan pituuden ymmärtäminen suureeksi ja sen transitiivisen luonteen käsittämien ovat edellytys yksiköiden ja metrisen järjestelmän ymmärtämiselle sekä viivoittimen oikeanlaiselle käytölle. Tutkimuksissaan Piaget havaitsi lasten ymmärtävän pituuden ja etäisyyden toisistaan erillisinä käsitteinä ja sanojen merkityksen muuttuvan vasta myöhemmin vastaamaan samaa tarkoitusta. Lasten kokemus pituudesta oli "täytetty" tila, joka koostui objektista tai matkan pituudesta. Etäisyyden lapset käsittivät Piaget'n tutkimusten perusteella sen sijaan erilaisina suureina, jotka kuvaavat jotakin tyhjää tilaa. [103, 104]

Edelleen Piaget määritteli lasten ymmärryksen pituuden mittaamisesta alkavan muodostua ensin pituuden vertailemisen avulla ja myöhemmin transitiivisuuden ymmärtämisen myötä vertailemalla eri pituuksia valittuun vertailukappaleeseen. Pitäyksiyksiköiden konstruoimisessa nähtiin tärkeänä pituuden säilymisen ymmärtäminen, vaikka pituus jaettaisiin pienempiin osiin, sekä osien spatiaalisen sijainnin järjestys. Tutkimusten perusteella ajateltiin, että lapsen hallitessa mitan käsitteen, hän ymmärtäisi myös yksiköiden laskemisen pituuden mittaamisessa ja pituuksien vertailemisessa. Käsitteellistä ymmärtämistä pidettiin edellytyksenä sille, että lapsi ymmärtäisi ja osaisi käyttää vaikkapa viivoitinta apuna mitatessaan pituuksia. [103, 104] Piaget'n mukaan lapsi ymmärtää ensin pituuden ja pinta-alan säilyviksi suureiksi, minkä jälkeen syntyy ymmärrys myös massan säilymisestä. Operationaalisessa vaiheessa, jonka lapsi saavuttaa 8-10 vuoden iässä, lapsi ymmärtää edellä kuvatut Piaget'n määrittelemät mittaamisen konseptuaaliset ja proseduraaliset piirteet. [104]

Osa nykytutkijoista pitää edelleen Piaget'n teoriaa pituuden säilymisen ja transitiivisuuden käsitteellisen ymmärtämisen tärkeystä edellytyksinä pituuden mittaamisen ymmärtämiselle. Muun muassa Kamii ja Clark [59] tutkivat mitan käsitettä luokkien 1-5 oppilailla ja saivat Piaget'n teoriaa vastaavia tuloksia. Kamii [58] on lisäksi todennut transitiivisuuden ymmärtämisen olevan ehto mittayksiköiden iteraatiivisuuden käsitteelliselle ymmärtämiselle. Sen sijaan Hiebertin [39, 40] tutkimuksissa kävi ilmi, etteivät transitiivisuuden ja pituuden säilymisen ymmärtäminen olleet edellytyksiä esimerkiksi pituuksien epäsuoralle vertailulle tai mittayksiköiden iteraation ymmärtämiselle. Piaget'n tutkimuksia on lisäksi kritisoitu vähäisistä perusteluista pituuden ja etäisyyden käsitteiden eroavaisuuksien merkityksestä sekä

mittavälineiden käytön huomiotta jättämisestä [117].

Mittaamiseen liittyvien epäselvyyksien ja ymmärtämisen hankaluuksien taustalta löytyy Hiebertin [40] mukaan ristiriita proseduraalisen ja konseptuaalisen tiedon välillä. Oppilaat eivät osaa yhdistää oppitunneilla tehtyjä harjoituksia formaaleihin symboleihin, jolloin esimerkiksi viivoitinta ei osata tulkita oikein, eikä sen käyttämisen ideaa ymmärretä. Oppilaat suorittavat yksikkömuunnoksia ja laskevat mittayksiköitä sujuvasti yhteen, mutta tuloksen saatuaan heillä ei kuitenkaan ole käsitystä tuloksen merkityksestä ja käyttötarkoituksesta. [40] Muissakin tutkimuksissa on ilmennyt selviä ongelmia mittavälineiden käyttöön liittyvissä tehtävissä, varsinkin jos kyseessä on ilman mittayksiköitä oleva viivoitin tai katkaistu viivoitin [15]. Tällöin oppilailta on jäänyt ymmärtämättä mittavälineen merkkien kuvaavan keskenään identtisten yksiköiden pituuksia eivätkä he ymmärrä mittayksiköiden lineaarisuutta, jolloin he eivät osaa aloittaa pituuden mittaamista muualta kuin nollassa merkitystä kohdasta [117]. Epäselvyyksiä on lisäksi syntynyt siitä, mitä mitatessa oikeastaan lasketaan: merkkejä, välejä vai etäisyyksiä. Lisäksi oppilailla on virhellisiä käsityksiä siitä, että vastaus olisi aina katsottavissa suoraan viivoittimesta ilman laskemista. Lukuisat virhekäsitykset mittaamiseen liittyen aiheuttavat ongelmia mitan käsitteen ja mittaproseduurien kehittymiselle. [15, 66, 117]

Tutkimuksissa on niin ikään havaittu oppilailla olevan hankaluuksia ymmärtää mittayksiköihin liittyviä konseptuaalisen tiedon eri komponentteja. Onnistunut mittaaminen edellyttää ymmärrystä siitä, että tietyssä tilanteessa käytettävien mittayksiköiden tulee olla keskenään identtisiä ja että mittayksiköiden tulee täyttää mitattava alue kokonaisuudessaan. Edelleen oppilaan tulee ymmärtää yksiköiden yhteenlaskun olevan mitattava pituus ja yhdellä yksiköllä mittaamisen jättämättä välejä tai päällekkäisyyksiä antavan pituuden mitan. Lisäksi oppilaan täytyy ymmärtää, että käytettävän mittayksikön koko on kääntäen verrannollinen pituuden mittaamiseen tarvittavien yksiköiden määrään. Mittaamisen konseptuaaliseen luonteeseen kuuluu myös ymmärrys siitä, että pituus ei muutu vaikka esineen paikkaa vaihdettaisiin sekä pituuksien transitiivisen luonteen ymmärtäminen vertailtaessa useampaa pituutta keskenään. [76, 120, 117]

Pituuden ja massan mittaamisessa tarvittava proseduraalinen osaaminen on taitoa ja tietoa käyttää sekä epästandardeja että standardeja mittavälineitä, kuten mittaa tai vaakaa, selvittääkseen tutkittavan suureen koon. Mittavälineen siirtäminen tai lukuarvon katsominen viivoittimesta ovat proseduraalista osaamista, joka yhdistettynä konseptuaaliseen tietoon antaa suoritettavalle mittaukselle merkityksen. Proseduraaliseen tietoon kuuluu myös mittojen suora vertaaminen sekä visuaalinen vertaaminen ja mitan suuruuden arviointi. [76, 117] Proseduraalisena tietona voidaan kootusti pitää kaikkea mittavälineiden, mittatekniikan ja tarvittavien työtapojen käyttöön liittyviä taitoja ja tietämystä, eikä proseduurien suorittamisessa ole välttämätöntä ymmärtää tiedon konseptuaalista puolta. Tutkimuksissa onkin havaittu oppilaiden mittaavan pituutta tekniikan puolesta oikealla tavalla, mutta käytetyt mittayksiköt eivät ole olleet keskenään identtisiä. Myös pituuden jakamisessa osiin on jaon huomattu olevan mielivaltaisesti valittu, jolloin osuudet eivät ole samanlaisia. Mittausta suoritettaessa mittayksiköiden väliin myös jätetään herkästi rakoja, jolloin koko etäisyys ei tule mitatuksi. [15]

Mittaamisen oppimisen haasteellisuus näkyy myös niin kotimaisissa kuin kansainvälisissä tutkimuksissa. Suomessa neljäsluokkalaisten oppilaiden mittaamistaidoista on saatu viitteitä kansainvälisen TIMSS¹-tutkimuksen tuloksista. Vuodesta 1995 lähtien neljän vuoden välein järjestettävällä tutkimuksella arvioidaan matematiikan ja luonnontieteiden osaamista sekä pyritään kehittämään kyseisten aineiden opetusta ja koulutusjärjestelmää osallistujamaissa. Suomi on osallistunut neljäsluokkalaisten osalta TIMSS-tutkimuksiin vuosina 1999, 2011 ja 2015. Matemaattisia taitoja mitataan tutkimuksessa kolmella alueella: luvut ja laskutoimitukset, geometriset muodot ja mittaaminen sekä tietoaaineiston käsittely. Vuoden 2011 tutkimuksessa havaittiin geometriset muodot ja mittaaminen -alueen osaamisen olleen keskimäärin muita aihealueita heikompaa lähes kaikissa osallistujamaissa ja tämä keskimääräistä heikompi suoriutuminen havaittiin myös suomalaisten tuloksissa. Kokonaisuudessaan Suomi sijoittui matematiikan osaamisen osalta kahdeksanneksi. [71]

Mittaamistaitoja on tutkittu myös OECD-maiden kolmen vuoden välein järjestettävissä PISA²-tutkimuksissa, joilla arvioidaan 15-vuotiaiden nuorten lukutaitoa sekä matematiikan ja luonnontieteiden osaamista. Matematiikka on ollut tutkimusvuosien 2003 ja 2012 pääalueena, joista vuoden 2012 PISA-tuloksista havaittiin suomalaisten oppilaiden mittaamistaitoja ja geometrisia kuvioita ja kappaleita sekä näiden ominaisuuksia mittaavan osa-alueen tulosten olleen selvästi heikommat kuin muiden matematiikan osa-alueiden. Kansallisen keskiarvon havaittiin olevan peräti 12 pistettä kokonaiskeskiarvoa alempi ja kansainvälisessä vertailussa Suomi sijoittuikin viidenneksitoista kyseisellä osa-alueella. [131] Sekä TIMSS että PISA-tutkimuksissa mittaamista arvioidaan osana geometriaa, eikä Suomessa ole kansainvälisistä tutkimustuloksista huolimatta tehty tutkimuksia, joissa mittaamistaidot olisivat päätutkimuskohteena. Sen sijaan Yhdysvalloissa on jo pitkään kiinnitetty huomiota lasten ja nuorten mitan käsitteen ja mittaproseduurien osaamisen heikkoon tasoon [37, 92].

Lukutaidon, kirjoittamisen, luonnontieteiden ja lukuisten muiden aihealueiden lisäksi oppilaiden matemaattisia taitoja mittaavia NAEP³-tutkimuksia on järjestetty Yhdysvalloissa vuodesta 1969 lähtien. Viimeisen viidentoista vuoden aikana matemaattisia taitoja on arvioitu joka toinen vuosi ja aihealueet on jaoteltu lukuihin ja laskutoimituksiin, mittaamiseen, geometriaan, algebraan ja tietojen analysointiin, tilastoihin ja todennäköisyyksiin. [44] Tutkimuksista saatujen tulosten perusteella oppilaiden mittaamistaidot ovat olleet jo useita vuosikymmeniä heikot kaikilla tutkituilla ikäryhmillä [66].

Pituuskäsitteen opettamista ja oppimista on tutkittu kansainvälisesti paljon, mutta massakäsitteelle ja massan punnitsemiseen liittyville proseduureille on annettu tutkimuksissa huomiota verrattain vähän. Australiassa tehdyssä kolmivuotisessa tutkimuksessa, jossa etsittiin tehokkaita lähestymistapoja opettaa matematiikkaa kolmen ensimmäisen kouluvuoden aikana, tutkittiin pituuden mittaamisen lisäksi myös oppilaiden (5-8 v.) käsitystä massasta [18]. Tutkimuksessa huomattiin, että kolmannen kouluvuoden päättyessä alle puolet oppilaista hallitsi standardiyksiköt kilogramman

¹*Trends in International Mathematics and Science Study*

²*Programme for International Student Assessment*

³*National Assessment of Educational Progress*

ja gramman. Massakäsitteen ja proseduurien oppimisessa huomattiin tärkeäksi erimassaisten kappaleiden konkreettinen vertailu [18]. Tätä havaintoa tukee myös toinen Australialainen tutkimus, jossa havaittiin 1-luokkalaisten oppilaiden käsitysten massasta tarkentuvan konkreettisten ja monipuolisten kokemusten kautta [19].

Vastauksena mitan käsitteen haasteellisuuteen ja mittaproseduurien oppimisen vaikeuksiin mittaamisen opettamisessa ohjataan lähtemään liikkeelle suorasta vertaamisesta epäsuoran vertaamisen kautta epästandardien mittayksiköiden kautta standardeihin mittayksiköihin ja viivoittimen käyttöön [40, 117]. Ymmärrystä mitan käsitteestä ei välttämättä synny, jos opetuksessa siirrytään liian nopeasti viivoittimen käyttöön eikä yhteyttä epästandardien ja standardien mittayksiköiden välillä tehdä ymmärrettäväksi ja selkeäksi. Epästandardien mittayksiköiden käyttöä perustellaan juuri niiden havainnollisen luonteen vuoksi, jolloin oppilaiden on helppo ymmärtää kokemusten kautta standardien mittayksiköiden tarve. Myös mittaamisen iteratiivinen luonne tulisi oppia jo varhaisessa vaiheessa ja alkuopetuksessa tulisikin painottaa valitun mittayksikön yksiselitteistä käyttötarkoitusta: mittayksiköksi valitaan aina kunkin mitattavan asian pohjalta sopivin yksikkö, ja mittaaminen tapahtuu asettamalla valittu mittayksikkö tiiviisti toistensa perään, kunnes on käyty läpi koko mitattava pituus. Tällöin laskemalla mittayksiköiden lukumäärä saadaan suoraan selville tutkitun pituuden suuruus. Näyttää kuitenkin siltä, että osa oppilaista ei ymmärrä epästandardeilla mittayksiköillä mittaamisen ja viivoittimen käytön välillä olevaa yhteyttä, vaan oppilaat tulkitsevat tapahtumat täysin erillisiksi. Osaksi tämän vuoksi juuri viivoittimen käytössä ilmenee ongelmia, kun mittavälinettä käytetään herkästi vain lopussa olevan lukumäärän ilmoittamiseen todellisen pituuden mittaamisen sijaan. Opetuksessa tuleekin kiinnittää huomiota mittayksiköiden opettamiseen ja yksiköiden ilmenemiseen viivoittimessa ja muissa mittavälineissä ja oppilaiden on tärkeää huomata ja ymmärtää mittavälineiden kohtisuoraan mitattavaa pituutta vastaan olevien merkkien kuvaavan aina yhden mittayksikön pituutta. [15, 117]

Koska mittaaminen on erottamaton osa nykyihmisen arkea ja koska aihe koetaan hankalaksi oppia, tulee mittaamisen periaatteiden opettamiseen kiinnittää erityistä huomiota jo alkuopetuksesta lähtien. Mittaproseduurien ohella konseptuaalinen tieto kehittyy parhaiten mielekkään ja merkityksellisen oppimisen avulla. Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa 2016 [95] vuosiluokkien 1–2 matematiikan opetuksen tavoitteena onkin ohjata oppilas ymmärtämään mittaamisen periaate hyödyntämällä konkreettista harjoittelua. Konkretia mahdollistuu esimerkiksi toiminnallisen ja ongelmaperustaisen oppimisen avulla. Tällöin oppilaat voivat ottaa nykyistä aktiivisemmän roolin matematiikan oppimiseen, jolloin heidän on mahdollista saada myönteisiä ja innostavia kokemuksia matematiikan opiskelusta [125].

4.3 Toiminnallinen ja ongelmaperustainen oppiminen

Toiminnallinen ja ongelmaperustainen oppiminen perustuvat konstruktivistiseen oppimiskäsitykseen, missä oppiminen nähdään aktiivisena tiedon konstruointiprosessina. Oppilaan omalla ajattelulla ja toiminnalla on suuri rooli tiedon rakentamisessa ja aikaisemmin omaksutut kokemukset, tiedot ja käsitykset ohjaavat oppilaan havain-

toja ja tulkintoja opittavasta asiasta [110, 128]. Myös Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteiden 2016 [95] mukaisessa ilmiöpohjaisessa opetussuunnitelmassa oppilaan rooli nähdään aktiivisena tiedonrakentajana. Oppiminen mielletään vuorovaikutuksen tulokseksi tilanne- ja asiayhteyteen sidottuna toimintana, ja varsinaisen lopputuotoksen sijaan painotus asettuu juurikin aktiiviseen oppimisprosessiin. Tiedon konstruktion lisäksi oppimisessa korostetaan vahvasti oppilaan omien ajattelutaitojen kehittymistä. Sen sijaan, että opettajan tieto siirtyisi suoraan oppilaalle, on oppilaan itse konstruoitava tieto uudelleen. Konstruktivistisilla oppimiskäsityksillä on painotuseroja, mutta kaikkia niitä yhdistää ajatus siitä, että tieto riippuu tiedon rakentajasta [110, 128].

Toiminnallinen oppiminen

Useat oppimismenetelmät sisältävät jonkinlaista aktiivista toimintaa ja lisäksi toiminnallisella oppimisella, aktiivisella oppimisella ja tutkivalla oppimisella on termeinä paljon samaa. [36, 121, 110] Tässä tutkimuksessa *toiminnallisella oppimisella* tarkoitetaan oppilaan aktiivista toimimista oman tiedon rakentajana tekemisen ollessa tavoitteellista ja yhteydessä laajoihin kokonaisuuksiin. Tarkemmin määriteltynä tarkoitan toiminnallisella oppimisella toiminnan, kokemuksellisuuden, osallistumisen ja harjoittelun kautta toteutettua työskentelyä, jossa pyritään tukemaan konseptuaalista tietoa proseduurien avulla. Menetelmässä painotetaan lisäksi oppilaan aktiivista osallistumista, yhteistoiminnallisuutta ja itsenäistä tiedonhankintaa.

Alkujaan Piaget'n kehitysteoria ja oppimiskäsitykset ovat luoneet pohjan toiminnalliselle oppimiselle opittavan asian käsittelemisen tapahtuessa konkreettisissa tilanteissa, joihin vaikuttavat sekä sosiaaliset että fyysiset ominaisuudet [104, 78]. Tekemällä oppimiseen (*learning by doing*) ja toiminnallisuuteen perustuu myös Deweyn kasvatusfilosofia, jonka mukaan ihminen hankkii toiminnan ja tekemisen kautta tietoa ympäristöstään. Deweyn näkemyksen mukaan oppiminen on ongelmanratkaisuprosessi, jossa opittava tieto kehittyy oppilaiden yhdistäessä aiemmin oppimaansa uusissa tilanteissa ja muodostaessa uusia tietorakenteita ongelman ratkaisemiseksi. [25] Poiketen Piaget'n kognitiivisen kehityksen vaiheteorian määritelmästä, jonka mukaan abstraktin ajattelun taso saavutetaan noin 12-vuotiaana, on nykytutkimuksissa havaittu abstraktin ajattelun kehittyvän paljon hitaammin [3]. Tämän vuoksi oppimisen edellytyksenä on oikean abstraktiotason valitseminen, jolloin konkreettisten ja havainnollisten sekä abstraktin opetuksen välillä on oppilaan kannalta edullinen tasapaino [129]. Toiminnalliset työtavat sopivat osana opetuskokonaisuutta kaikille oppilaille mahdollistamalla abstraktien ilmiöiden konkretisoimisen mielekkäällä ja rakentavalla toiminnalla [121].

Alkuopetuksessa toiminnallisella oppimisella pyritään hyödyntämään oppilaiden luontaista kykyä omaksua uutta tietoa leikin ja toiminnan kautta, eikä yhden ainoan oikean vastauksen löytyminen ole pääasia [123]. Leikillisuus onkin yksi toiminnallisten opetusmenetelmien peruspilareista, jota hyödyntämällä luodaan vuorovaikutuksellinen ja keskusteleva oppimisympäristö. Konkreettiset ja aktiiviset tilanteet luovat parhaimmillaan mahdollisuudet lapsilähtöiselle oppimiselle, jolloin innostus ja kiinnostus oppimisen tavoitteiden löytymiselle ovat mahdollisia oppilaista itsestä käsin.

[80] Toiminnallinen oppiminen on lisäksi varsin hyvä vaihtoehto esimerkiksi keskitymishäiriöistä tai ylivilkkaudesta kärsiville oppilaille, jotka pystyvät tavoitteellisen toiminnan kautta kohdistamaan energiansa opittavaan asiaan. Esimerkiksi Järvisen [56] tutkimuksissa havaittiin toiminnallisuuden lisäävän oppilaiden tarkkaavaisuutta, oppilaiden tutkivan opittavaa asiaa useasta eri näkökulmasta ja keskittyvän pitkiäkin aikoja annettuihin tehtäviin.

Esimerkiksi Unkarissa toiminnallisuutta hyödynnetään matematiikan opetuksessa hyvin oppimistuloksin [113]. Toiminnallisten työtapojen käyttämistä tukee myös Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2016 [95], jonka mukaan toiminnallisella opetuksella pyritään mahdollistamaan erilaisille oppijoille keinoja oman oppimisen parantamiseksi painottamalla kokemuksellisia ja toiminnallisia työtapoja pelien ja leikkien sekä fyysisen aktiivisuuden muodossa elämysten ja motivoimisen kautta [95]. Kun oppilaan annetaan kokeilla, yrittää ja erehtyä sekä onnistua ja oivaltaa, rakentuu opittavasta asiasta merkityksellinen kokonaisuus. Oppilas pystyy omien kokemustensa kautta ymmärtämään ja oppimaan syyt ja taustat, ja konkretian avulla havainnoille luodaan merkityksiä. Toiminnallisuuden kautta on lisäksi mahdollista ohjata oppilaita sekä proseduraalisen että konseptuaalisen tiedon samanaikaiseen oppimiseen ja opitun tiedon vahvistamiseen.

Ongelmaperustainen oppiminen

Ongelmaperustaisella oppimisella (problem based learning) on saatu hyviä tuloksia oppilaiden motivaation kasvattamisessa. Ongelmaperustainen, toisinaan myös ongelmalähtöinen tai ongelma-keskeinen oppiminen, on matematiikan oppimista ongelmanratkaisun kautta lähestyvä opetusmenetelmä, jossa niin ikään korostuu oppijan aktiivinen rooli tiedon rakentajana. Menetelmällä tavoitellaan päättelyn ja ongelmanratkaisutaidon myötä tapahtuvaa matemaattisen ajattelun kehittymistä ymmärtämisen ja tiedon rakentamisen kautta. Kriittisen ajattelun ja ongelmanratkaisutaitojen kehittäminen pyrkii konkreettisiin toiminnoihin tiedon luonteen ja asiantuntijuuden kehittymiseen sekä opetuskulttuurin oppilaslähtöiseen uudistamiseen. [14, 108, 109]

Ongelmaperustaisen oppimisen hyödyntäminen osana alkuopetuksen matematiikan oppimista saa tukea Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteista 2016, joissa kehoitetaan kehittämään oppilaiden ongelmanratkaisu- ja tiedonkäsittelytaitoja sekä määritellään opetuksen tehtäväksi muun muassa oppilaiden loogisen, täsmällisen ja luovan matemaattisen ajattelun kehittämisen [95]. Alkuopetuksessa ongelmaperustaisen oppimisen hyödyt saadaan parhaiten esille, kun oppilaita ohjataan toiminnan ja konkretian kautta matemaattisten ongelmien itsenäiseen ja monipuoliseen toimintaan sekä oman matemaattisen ajattelun esille tuomiseen [123]. Ongelmanratkaisutaitoja voidaan kehittää perinteisten ongelmanratkaisutehtävien lisäksi hyödyntämällä matematiikan opiskelussa ongelmaperustaista oppimista, jolloin oppilaita ohjataan kohtaamaan erilaisia tehtävätyyppejä ongelmanratkaisuprosessien kautta.

Matematiikassa ongelmanratkaisutyypit voivat olla joko avoimia tai suljettuja. Avoimissa ongelmissa ratkaisuprosessi on luova ja erilaisia ratkaisumenetelmiä voidaan käyttää joustavasti yhdessä. Oikean vastauksen löytyminen ja vastauksen loogisuus eivät ole avoimissa ongelmissa itsestään selviä. Sen sijaan suljettujen ongelmien

kohdalla ratkaisuprosessissa hyödynnetään tiettyjä, oikeita menetelmiä, jotka tuottavat usein jo etukäteen tiedossa olevan vastauksen. [123, 35] Ongelmanratkaisu voidaan Gagnén [31] mukaan määritellä prosessiksi, jossa aiemmin opittua osataan hyödyntää uudenvälisessä tilanteessa. Tällöin haasteena on oikean vaikeusasteen ja mielekkään tehtävätilanteen rakentaminen opetuksen lähestyessä opittavia asioita ongelmanasettelun kautta. Menetelmänä ongelmanratkaisu pyrkii kehittämään matemaattista ajattelua, jonka osa-alueita ongelmanratkaisu- ja päättelytaito ovat.

Ongelmaperustainen oppiminen pohjautuu niin ikään konstruktivistiseen oppimiskäsitykseen, jonka mukaisesti oppilas nähdään aktiivisena oppijana. Ongelmanratkaisua pidetäänkin menetelmänä, jota käyttämällä tiedon konstruoinnin haasteet voidaan kohdata [123] ja oppiminen nähdään riippuvaiseksi oppilaiden kyvystä hallita oppimistaan. Jo Piaget'n oppimisen teoriat korostivat oppilaiden omakohtaisten kokemusten tärkeyttä matematiikan käsitteiden ja proseduurien oppimisessa. Olennaista on matemaattisen tiedon kehittyminen merkitykselliseksi ja ymmärryksen syntyminen siitä, kuinka uudet tiedot liittyvät vanhoihin jo opittuihin tietoihin. [78]

Käsitteinä toiminnallisuus ja ongelmaperustaisuus ovat matematiikan opetuksessa hyvin samankaltaisia. Toiminnallinen matematiikka voidaan mieltää konkreettisin keinoin toteutettavaksi ongelmanratkaisuksi [35], mutta toiminnallisessa matematiikassa myös muut toimenpiteet kuin ongelmanratkaisu voivat olla vahvasti ratkaisussa mukana. Tässä tutkielmassa toiminnallinen ja ongelmaperustainen oppiminen nähdään toisiaan tukevinä opetusmenetelminä, joiden samanaikainen käyttäminen antaa mahdollisuudet monipuolisten, motivoivien ja oppimista edistävien opetuskonaisuuksien luomiselle, joissa oppilas itse on aktiivinen tiedon rakentaja. Tuohilammen [125] mukaan vuorovaikutuksella ja aktiivisella roolilla on todettu olevan suuri merkitys matematiikan oppimiseen. Toiminnallinen ja ongelmaperustainen oppiminen mahdollistavat lisäksi matematiikan kielentämisessäkin hyödynnettävien neljän kielen (seuraava kappale) käyttämisen, ja joskus matemaattisen kokemuksen ilmaiseminen voi olla helpompaa liikkein tai kuvin ilmaistuna kuin puhuttuna tai kirjoitettuna.

4.4 Matematiikan kielentäminen arviointivälineenä

Kielentäminen ja erityisesti matematiikan kielentäminen ovat suhteellisen tuoreita käsitteitä suomalaisessa didaktiikan tutkimuksessa. Maailmalla 1990-luvulla muotoutunut termi *language* (esim. [11]) sai suomenkielisen vastineensa *kielentäminen* Joutsenlahden määrittelemänä vuonna 2003 [49]. Matematiikan kielentämisen määritelmä sisältää matemaattisen ajattelun jäsentelyn, käsitteiden konstruointiprosessin, reflektoinnin ja ajattelun ilmaisemisen joko suullisesti tai kirjallisesti hyödyntäen luonnollista kieltä, symbolikieltä, kuviokieltä tai taktiilista toiminnan kieltä ([51, 52]). Matemaattinen ajattelu pitää sisällään matemaattisen tiedon, eli konseptuaalisen, proseduraalisen ja strategisen tiedon, prosessoinnin [50]. Tässä tutkielmassa on pyritty mahdollistamaan konseptuaalisen ja proseduraalisen tiedon samanaikainen oppiminen sekä arvioimaan oppilaiden matemaattisen tiedon kehittymistä matemaattisen ajattelun kielentämisen avulla.

Matematiikan kielentämisessä yhdistyvät multisemioottisen lähestymistavan mukaisesti kuviokieli, taktiilinen toiminnan kieli, luonnollinen kieli sekä niin sanottu matematiikan kieli. Matematiikan kielellä tarkoitetaan niitä merkintätapoja, kuten lukuja ja operaattoreita, jotka ovat universaaleja ja jotka kuka tahansa matemaatikkaa ymmärtävä tunnistaa äidinkielestä riippumatta. [52] Keinotekoiseksi kieleksi määritellyn matematiikan kielen käyttäminen on tarkkaa ja täsmällistä, mutta pelkästään matemaattisiin symboleihin tukeutuminen tarjoaa hyvin suppeaa informaatiota matemaattisen ajattelun kulusta. [91] Neljästä eri kielestä juuri taktiilinen toiminnan kieli korostuu esi- ja alkuopetuksessa, joissa konkreettisten välineiden avulla saadaan tuntumaa matemaattisten käsitteiden ja ilmiöiden opetteluun.

Matematiikan kielentäminen nivoutuu Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa 2016 [95] määriteltyyn monilukutaidon käsitteeseen, jolla tarkoitetaan kaikenlaisten viestien tulkinnan ja tuottamisen taitoja. Monilukutaito liittyy ajattelun ja viestinnän taitoihin sekä tiedon hankkimisen, muokkaamisen, tuottamisen, esittämisen, arvioimisen ja arvottamisen taitoihin ympäristöstä ja tilanteesta riippumatta joko sanallisesti, kuvallisesti, numeerisesti tai symbolisesti. [95] Monilukutaidolla tavoitellaan myös eri tiedonalojen kielen hallintataitoja, jolloin käsitteiden ja käsittejärjestelmien ymmärtämisen myötä oppilas voi ymmärtää opittavia asioita paremmin. Keskusteleva ja pohtiva ilmapiiri auttaa oppimisessa ja ajatusten jäsentämisessä [52]. Monilukutaito ja matematiikan kielentäminen osana matematiikan alkuopetusta antavat sekä oppilaille että opettajille monipuoliset työkalut oppimiseen ja osaamisen tason seuraamiseen.

Matematiikan kielentämisen hyödyt oppimiselle on todettu useissa Tampereen yliopiston Sanan lasku -hankkeen tutkijoiden ja opinnäytteiden tekijöiden tutkimuksissa [52]. Suotuisia vaikutuksia oppimistuloksiin on havaittu myös Opetushallituksen toteuttamassa tutkimuksessa *Perusopetuksen matematiikan oppimistulosten pitkittäisarviointi vuosina 2005-2012* [84], jonka tulosten perusteella voidaan todeta kielentämisestä olevan hyötyä sekä keskitasoa paremmin että heikommin suoriutuville oppilaille. Sen lisäksi, että oppilaat hyötyvät matematiikan kielentämisestä, on menetelmästä hyötyä myös opettajalle. Opettaja pystyy arvioimaan oppilaiden ajatteluprosesseja toiminnan ja käsitteenmuodostuksen kautta sekä havaitsemaan mahdollisia virhekäsityksiä ja uskomuksia helpommin, kun oppilaat tuovat esiin omaa matemaattista ajatteluaan [49]. Oppilaan ajattelun havainnoiminen antaa välineet opetuksen yksilöllistämiseksi kunkin oppilaan tarpeisiin sopivaksi, minkä vuoksi opettajan on tärkeää pyytää perusteluja oppilaiden vastauksiin [55]. Oppilaiden omin sanoin kerrotut ajatukset ja ratkaisupolut paljastavat nopeasti mahdolliset väärinymmärrykset ja puutteet sekä oppilaille itselleen että opettajalle ja oppilaiden keskustelut esimerkiksi matematiikan käsitteistä auttavat opettajaa havainnoimaan oppilaiden ymmärryksen tasoa. [17]

Koska perinteiset oppikirjat ohjaavat niukkaan ja yksioikoiseen tapaan tehdä matematiikan tehtäviä, halutaan matematiikan kielentämisellä mahdollistaa monipuolisempi ja yksilöllisempi tapa kuvata ratkaisun löytämiseksi valittuja polkuja. Taitoa ilmaista matemaattista ajattelua tullaan todennäköisesti yhä enenevässä määrin tarvitsemaan muun muassa ylioppilaskirjoituksissa, kun siirryttäessä sähköisiin ympäristöihin oppilaan oman ajatteluprosessin monipuolisen esiin tuomisen mer-

kitys kasvaa. Jotta kielentäminen tuntuisi luontevalta ratkaisumenetelmältä osana matematiikan opiskelua, tulisi keskusteleva ja pohtiva ote ottaa opetukseen mukaan heti matematiikan opinpolun alussa. Tähän tutkimukseen osallistunut luokka on tottunut kielentämään ajatteluaan ja hyödyntämään konkreettisia välineitä opiskelussa, joten luokan havainnoiminen kielentämistä hyödyntäen oli luonnollinen arvioinnin väline.

5 Tutkimuskysymykset

Tämän kehittämistutkimuksen tavoitteena on kehittää toiminnallista ja ongelmaperustaista oppimista tukeva oppimateriaali alakoulun 2. luokan matematiikkaan pituuden ja massan opettamiseen. Kehittämistutkimuksen tutkimuskysymykset ovat seuraavat:

1. Millainen on pituuden ja massan opetus 2. luokan matematiikan oppikirjojen näkökulmasta?
2. Minkälainen toiminnallinen ja ongelmaperustainen oppimateriaali tukee pituuden ja massan oppimista?
3. Miten tässä kehittämistutkimuksessa kehitetty oppimateriaali soveltuu pituuden ja massan opetukseen?

Ensimmäiseen tutkimuskysymykseen haettiin vastausta empiirisen ongelma-analyysin avulla. Suoritin empiirisessä ongelma-analyysissä valituille 2. luokan matematiikan oppikirjoille aineistolähtöisen sisällönanalyysin, jonka vaiheet olen kuvannut kappaleessa 6.1. Oppikirja-analyysin tulokset ovat kuvattuna kappaleessa 7.1. Teoreettisen ongelma-analyysin avulla pyrin puolestaan löytämään vastauksen toiseen tutkimuskysymykseen tutustumalla luvuissa 3 ja 4 pituus- ja massakäsitteiden historiaan ja toiminnallista ja ongelmaperustaista oppimista, konseptuaalista ja proseduraalista tietoa sekä pituuden ja massan opetusta käsittelevään tutkimuskirjallisuuteen. Kolmanteen tutkimuskysymykseen etsin vastausta koko kehittämisprosessin kautta empiirisen tapaustutkimuksen avulla luvussa 7.

6 Kehittämisprosessi

Toteutin kehittämistutkimuksen kvalitatiivisena, empiirisenä tapaustutkimuksena, jossa selvitin kehittämistyönä syntyneen oppimateriaalin toimivuutta mittaamisen opettamisessa 2. luokan matematiikassa. Kehitin pituuden ja massan opettamiseen laaditun oppimateriaalin teoreettisen ja empiirisen ongelma-analyysin pohjalta ja otin kehittämisessä huomioon ongelma-analyyseissä esiin nousseet tutkimustiedot. Testasin kehitettyä materiaalia autenttisisissa luokkahuonetilanteissa, jolloin toimin sekä opettajana että tutkijana. Keräsin aineistoa havainnoimalla ja videoimalla luokkatilanteita. Lisäksi keräsin oppilaiden tunnilla ja kotona tekemät tehtävät tutkimusmateriaaliksi.

Muodostin teoreettisen viitekehyksen teoreettisen ongelma-analyysin pohjalta, jossa selvitin mitä tarkoitetaan käsitteillä matemaattisen tiedon duaalisuus, toiminnallinen ja ongelma-perustainen oppiminen sekä matematiikan kielentäminen arviointivälineenä (luku 4). Teoreettinen viitekehys loi pohjan itse tutkimuksen tekemiselle ja kehittämistyölle, ja aikaisemmat tutkimukset mittaamisesta ja mittaamisen opettamisesta loivat pohjan kehittämisprosessin tavoitteille. Katsaus mittaamisen historiaan antoi laajemman perspektiivin mitan käsitteelle ja mittaamiseen liittyville proseduureille (luku 3). Ongelma-analyysi sisälsi myös empiirisen ongelma-analyysin (kappale 6.1), jonka tavoitteena oli selvittää millaisia tehtävätyyppejä 2. luokan matematiikan oppikirjoissa on koskien pituuden ja massan mittaamista ja sitä, onko tehtävätyyppien rinnalle tarvetta kehittää uudenlaisia tehtäviä. Molemmat ongelma-analyysit muodostavat yhdessä McKenneyn ja Reevesin [81] mukaisen syklimallin 1. mikrosyklin.

Kuvaan tässä luvussa ensimmäisen mesosyklin empiirisen ongelma-analyysin I sekä kehittämisprosessin vaiheet alustavasta suunnittelusta oppimateriaalin ensimmäisen version kehittämiseen. Lisäksi kuvaan kehitetyn materiaalin esitestauksen ja sen pohjalta tehdyn arvioinnin. Kuvaan tässä luvussa myös toisen mesosyklin kehittämisvaiheen II jatkokehityksen ja materiaalin varsinaisen testauksen empiirisessä ongelma-analyysissä 3 (ks. kuva 2.1).

6.1 Empiirinen oppikirja-analyysi

Teoreettisessa ongelma-analyysissä ilmeni mittaamisen opettamisen ja oppimisen olevan haastavaa. Mittaamisen on todettu olevan heikosti osattu aihealue niin Suomessa kuin muuallakin maailmassa, mikä käy ilmi esimerkiksi PISA- ja TIMSS-tutkimuksista (ks. kappale 4.2). Pyrin empiirisellä ongelma-analyysillä selvittämään missä laajuudessa pituuden ja massan mittaamista opetetaan 2. luokan matematiikassa ja minkälaisia tehtävätyyppejä nykyisissä oppikirjoissa on mittaamiseen liittyen. Oppikirja-analyysi antoi hyvän käsityksen mittaamisen opettamisesta 2. luokalla, sillä Opetushallituksen viimeaikaisten matematiikan oppimistulosten arviointien [89, 90] mukaan oppikirja ja opettajanopas ovat tärkeimmät opettajien opetusta ohjaavat työkalut.

Luokittelin analyysissä pituuden ja massan mittaamisen tehtävätyyppejä kolmen eri kirjasarjan opettajanoppaasta, jotka olivat SanomaPron *Kymppi* [93], WSOY:n *Laskutaito* [73] ja Otavan *Tuhattaituri* [126], joista *Tuhattaituria* ja *Kymppiä* kehitetään jatkuvasti kustantajien pääkirjasarjoina ja molemmista on julkaistu uuden Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteiden mukaiset painokset. Tutkimukseen valikoituivat edellä mainitut Perusopetuksen opetussuunnitelman 2004 [94] mukaiset vuosiluokan 2 suomenkieliset perinteiset painetut kevätosan oppikirjat saatavuutensa ja suuren käyttöasteen vuoksi. Muut perinteiset oppikirjat sekä verkossa olevat aineistot ja e-kirjat jätin analyysin ulkopuolelle tutkimusaikataulullisista syistä sekä materiaalin rajoitetun saatavuuden vuoksi.

Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa 2004 [94] alkuopetuksen mittaamisosiossa tavoitteiksi on määritelty mittaamisen periaatteen ymmärtäminen, mitan käsitteistä pituuden, massan, pinta-alan, tilavuuden, ajan ja hinnan oppiminen sekä mittavälineiden käytön hallitseminen, tärkeimpien mittayksiköiden käyttäminen ja vertailu sekä mittaustulosten arviointi. Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2016 [95] eroaa edellisestä niiltä osin, ettei uuden opetussuunnitelman mukaisesti vuosiluokilla 1-2 käsitellä mitan käsitteistä pinta-alaa eikä harjoitella aikaisemmin mittaamisosioon liitettyä rahan käyttöä. Lisäksi opetussuunnitelman perusteissa 2016 on erikseen mainittu mittayksiköistä käsiteltäviksi metri, senttimetri, kilogramma, gramma, litra ja desilitra.

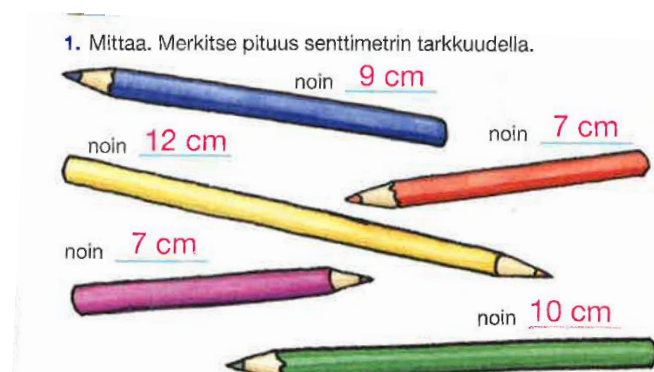
Tutkimusaineistoksi valikoituivat kirjasarjojen opettajanoppaat, joista tutkin sisällönanalyysin keinoin oppilaan tehtävisivut. Muut opettajanoppaassa olevat tehtäväehdotukset ja opetusvinkit jätin huomioimatta tehtävätyyppejä analysoitaessa, sillä on opettajasta riippuvaista mitä opettajanoppaan osioita hyödyntää omassa opetuksessaan. Sen sijaan tutkin opettajanoppaista, käytetäänkö mittaamisosiossa termiä massa vai paino, ja onko valintaa perusteltu. Perusaukeaman tehtäviä, kotitehtäviä, lisätehtäviä tai kertaustehtäviä en erotellut tutkimuksessa toisistaan, sillä halusin saada analyysissä kokonaiskuvan kaikista kirjojen sisältämistä mittaamistehtävistä.

Kympissä tehtävät on jaettu perusharjoitteluun, lisätehtäviin, vaativampiin ja kotitehtäviin. Ensimmäisen aukeaman perustehtävät on tarkoitettu kaikille oppilaille tunnilla tehtäviksi. Toisen aukeaman ensimmäisen sivun lisätehtävät ovat jatkumona perusharjoittelulle ja tehtävät on tarkoitettu itsenäiseen etenemiseen tunnilla. Toisen puoliskon vaativammat tehtävät ovat ylöspäin eriyttäviä tehtäviä. Kotitehtävät ovat kaikille kotona tehtäväksi tarkoitettuja perusharjoittelutehtäviä. [93] *Laskutaidossa* ensimmäisen aukeaman tehtävät ovat niin ikään tarkoitettu kaikille perusharjoitteluun, lisätehtävisivu hieman vaativampaan itsenäiseen työskentelyyn ja oppikirjan lopussa erillisenä olevat kotitehtävät kaikille kotona tehtäväksi perusharjoitteluksi. [73] Myös *Tuhattaiturissa* ensimmäinen aukeama on kaikille yhteisiä perustehtäviä, joihin sisältyy myös kotitehtäväosio. Toisen aukeaman ensimmäisellä sivulla on perustehtävien kaltaisia lisätehtäviä ja toisella sivulla eriyttämiseen tarkoitettuja matemaattisia ongelmia ja soveltamista vaativia tehtäviä. [126]

Määrittelin aineistolähtöisessä sisällönanalyysissä (ks. lisää kappaleesta 2.4) analyysiyksiköksi oppikirjojen tehtävät. Tarkoitan yhdellä tehtävällä yhtä numeroitua kokonaisuutta alakohtineen eli en käsitellyt mahdollisia alakohtia a, b, c, jne. omina tehtävinään. Ensimmäisessä vaiheessa eli pelkistämisvaiheessa karsin aineistosta pois

kaiken epäolennaisen, mikä tarkoitti kaikkien kolmen oppikirjan tehtävien läpikäymistä. Kirjasin tutkimuksen kannalta oleelliset tehtävät muistiin Excel-taulukkoon (liite A, kuva 1) tehtävien sisältämien avainsanojen mukaan oppikirjoittain sekä jaoteltuna pituuden ja massan mukaisiin tehtäviin. Pidin oleellisina tehtävinä kaikkia pituuden ja massan mittaamista käsitteleviä tehtäviä, jotka olivat perusaukeamalla, lisätehtävänä, kotitehtävänä tai vihkotehtävänä. Sellaiset tehtävät, jotka sijoittuivat kirjassa mittaamistehtävien kanssa samoille sivuille, mutta jotka eivät sisältäneet mitään pituuteen tai massaan liittyvää, jätin tutkimuksessa huomioimatta. En ottanut analyysissä huomioon geometrinen kuvioiden yhteydessä olleita tehtäviä, joissa käytettiin viivoitinta apuna janojen ja suorien piirtämisessä, sillä nämä tehtävät eivät ole oleellisia pituuden ja massan mittaamisen harjoittelemisessa. Sen sijaan otin analyysissä huomioon viivoittimen käyttämisen harjoittamiseen tarkoitettut tehtävät. Kaiken kaikkiaan kolmessa tutkittavassa oppikirjassa oli yhteensä 320 pituuden ja massan mittaamista käsittelevää tehtävää. Liitteen A kuvassa 4 näkyy tehtävätyyppien jakautuminen oppikirjojen välillä.

Pelkistämisen jälkeen lähdin ryhmittelemään aineistoa tarkoituksena tiivistää ja luokitella kerättyjä tietoja eri ryhmiin. Yhdistelin tehtävätyyppejä samankaltaisuuksien ja eroavaisuuksien nojalla aihealueittain kolmeksitoista ryhmäksi. Luokittelun tulokset ovat liitteen A kuvassa 5. Ryhmittelyvaiheen ajatellaan itsessään olevan myös osa viimeistä vaihetta, käsitteellistämisprosessia, sillä vaihteita ei voida täysin erottaa toisistaan (kappale 2.4). Jatkoin käsitteellistämisen vaiheessa ryhmittelyn perusteella muodostettujen kolmentoista luokan jakoa edelleen kohti yleisempiä luokkia ja yläkäsitteitä. Jaoin ryhmittelyvaiheen luokat käsitteellistämisen aikana kolmeen pääluokkaan: konkreettisiin tehtäviin, päättelytehtäviin ja peruslaskutaitoa vahvistaviin tehtäviin.



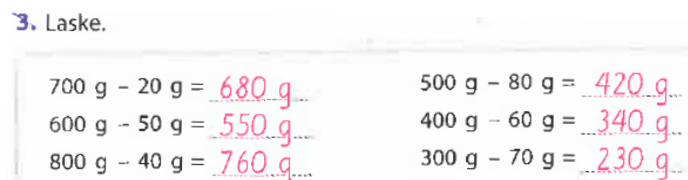
Kuva 6.1: Esimerkki konkreettiseksi luokitellusta tehtävästä. Osa tehtävästä 1, s. 70 oppikirjasta *Laskutaito 2* [73].

Tarkoitan konkreettisilla tehtävillä tässä yhteydessä tehtäviä, joissa oppilas itse mittaa tai piirtää pituuksia. Tähän pääryhmään sisältyvät myös sellaiset toiminnalliset tehtävät, joissa mittaamiseen on liitetty jokin toiminnallinen osa, kuten paperilennon rakentaminen. Kuvassa 6.1 on esimerkki konkreettiseksi luokitellusta tehtävästä. Päättelyä, soveltamista ja arviointia sisältävät tehtävät ryhmittelin saman pääkäsit-



Kuva 6.2: Esimerkki päättelytehtäväksi luokitellusta tehtävästä. Tehtävä 5, s. 170 oppikirjasta *Open kymppi 2* [93].

teen, päättelytehtävien alle. Esimerkkinä päättelytehtäväksi luokitellusta tehtävästä on kuvan 6.2 tehtävä. Peruslaskutaitoja vahvistaviin tehtäviin sisällytettiin yhteen- ja vä-



Kuva 6.3: Esimerkki peruslaskutaitoa vahvistavasta tehtävästä. Tehtävä 3, s. 169 oppikirjasta *Open kymppi 2* [93].

hennyslaskut, allekkainlaskut, yksikkömuunnostehtävät sekä viivoittimen käyttämisestä vahvistavat tehtävät. Kuvassa 6.3 on esimerkki vähennyslaskusta, joka on luokiteltu peruslaskutaitoa vahvistaviin tehtäviin. Liitteen A kuvassa 6 näkyvät ryhmittely- ja käsitteellistämisvaiheissa muodostetut luokat ja pääluokat.

6.2 Materiaalin kehittämisvaihe I

Kehitin teoreettisen ja empiirisen ongelma-analyysin pohjalta 2. luokan matematiikkaan soveltuvan mittaamisen oppimateriaalin kehittämisvaiheessa I. Otin materiaalin kehittämisessä huomioon teoreettisessa ongelma-analyysissä esiin nousseen tutkimustiedon toiminnallisesta ja ongelmaperustaisesta oppimisesta, sekä konseptuaalisen ja proseduraalisen tiedon samanaikaisesta kehittymisestä (ks. luku 4). Empiirisestä ongelma-analyysistä (ks. kappale 6.1) saatujen tulosten nojalla tarve toiminnallisille ja ongelmaperustaisesta oppimista hyödyntäville tehtäville pituuden ja massan opettamisessa oli ilmeinen.

Suoritin ennen varsinaisen kehittämisen aloitusta edellä kuvatut ongelma-analyysit tutkimuksen tavoitteena olleen toiminnallisen, ongelmaperustaisen ja konseptuaalisen sekä proseduraalisen tietoa yhdistävän oppimateriaalin kehittämisen lähtökohdaksi. Tarveanalyysi antoi välineet kehitettävän oppimateriaalin tavoitteiden määritt-

lyyn ja loi rungon tavoiteorientoituneelle kehittämiselle [54]. Esitettyjen teorioiden ja aiempien tutkimusten sekä oppikirja-analyysin perusteella selvitin millainen oppimateriaali soveltuu ja millaisen oppimateriaalin tarve mittaamisen opettamisessa on. Varsinainen oppimateriaalin kehitystyö perustui näihin havaintoihin, ja asetin kehitettävän oppimateriaalin päätavoitteiksi ongelma-analyysien pohjalta seuraavat kohdat:

1. Oppimateriaali liittyy oppilaan arkeen ja materiaalin avulla oppilas pystyy kehittämään sekä konseptuaalista että proseduraalista osaamistaan, sekä saa konkreettisia käsityksiä siitä, missä, miten ja miksi mitan käsitteitä ja mittayksiköitä käytetään.
2. Oppimateriaalin tehtävät hyödyntävät toiminnallista ja ongelmaperustaista oppimista ja kehittävät näissä tarvittavia taitoja, kuten yhteistyötaitoja, kriittistä ajattelua, tiedon soveltamista, kokonaisuuksien hahmottamista, toimimista aktiivisena oppijana ja kykyä ottaa vastuuta omasta työskentelystä.
3. Oppimateriaali mahdollistaa oppilaan oman matemaattisen ajattelun esiintuomisen.

Valitsin mittaamisen opetuskokonaisuuteen käsiteltäviksi aiheiksi opetussuunnitelman mukaisesti pituuden ja massan (painon) mittaamisen. Vaikka paino ja massa ovat tutkittavan kappaleen kaksi eri ominaisuutta painon kuvatessa voimaa, jolla Maa vetää kappaletta puoleensa ja massan kuvatessa kappaleen hitautta eli kykyä vastustaa liiketilan muutosta, päätin käyttää oppimateriaalissa systemaattisesti käsitettä paino massan sijaan. Päädyin painokäsitteen valintaan yhdessä tutkimusluokan oman opettajan kanssa. Yleisesti alkuopetuksen matematiikassa painon yksikkönä käytetäänkin kilogrammaa eikä massan käsite juuri esiinny oppikirjojen tehtävissä, vaikka toisaalta Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa 2016 [95] käytetään eksaktia käsitettä massa. Mitan käsitteen valintaa puolsi myös se, että tasapainovaaakoja käytettäessä paino-termi on hyväksyttävä ilmaisu. Päätin jättää tilavuuden tästä opetuskokonaisuudesta pois, koska se on johdannaissuure, toisin kuin pituus ja massa, jotka ovat SI-järjestelmän perussuureita (ks. 3.2).

Kehittämistutkimuksen tutkimusluokaksi saatiin yksi tamperelaisen alakoulun 2. luokka. Lähdin kehittämään oppimateriaalin runkoa selvittämällä varsinaiseen tutkimuskäyttöön annettujen oppituntien määrän. Jaoin käytettävissä olevat tunnit alustavasti pituuden ja massan mittaamista käsitteleviin kokonaisuuksiin niin, että varasin pituuden mittaamiselle enemmän tunteja (5×45 min) kuin massalle (2×45 min). Mukailin tuntijaottelussa löyhästi eri oppikirjojen painotusta opettavien käsitteiden opettamisessa. Tässä vaiheessa selvitin myös tarvittavien materiaalien, kuten metrin mittojen valmistukseen tarvittavien rimojen hankkimisen. Kävin alustavan suunnittelun vaiheessa keskusteluja tutkimusluokan oman luokanopettajan ja Solmu-materiaalin kehittäjän kanssa tutkimuksen tavoitteista ja lähtökohdista sekä käytännön toteutuksesta.

Suunnittelin jokaiselle oppitunnille mielekkään, motivoivan ja oppilaan omaan kokemusmaailmaan pohjautuvan oppimiskokonaisuuden. Kehitin tehtäväkokonai-

suudet kunkin oppitunnin aiheena olevan mittaamiseen liittyvän ongelman ympärille. Asetin yhdeksi materiaalin keskeiseksi tavoitteeksi oppilaiden oman ajattelun esiin tuomisen mahdollistamisen. Koin myös oppilaiden omat kokemukset mittaamisesta tärkeäksi huomioitavaksi asiaksi, joten kiinnitin kehitetyt tehtävät järkevästi arkitodellisuuteen. Suunnittelin tehtävät toteutettavaksi ryhmissä ja pareittain. Pituuden ja massan mittaamisen opetuskokonaisuuksien jälkeen pidettävät oppimista arvioivat tehtävät tarkoitin tehtäväksi itsenäisesti.

Aloitin opetuskokonaisuuden suunnittelemisen pituuden mittaamiseen soveltuvan materiaalin kehittämisestä. Tavoitteena oli luoda kokonaisuus, joka konkretisoisi ja havainnollistaisi mittaamisen merkityksen ja tarpeellisuuden, sekä mahdollistaisi mittaamistaitojen oppimisen toiminnallisesti ja ongelmaperustaisesti. Seuraavaksi kuvaan alustavat tuntisuunnitelmat pituuden ja massan oppitunneille.

Pituus

Koko tutkimuksen ajan mittaamisessa käytetään sisältöjaon ideaa eli tuodaan mittaamisen aikana ilmi ajatus siitä, kuinka monta kertaa valittu mittayksikkö sisältyy mitattavaan pituuteen. Jokaisella tunnilla harjoitellaan sopivan mittayksikön valintaa ja valinnan merkitystä mittatuloksen kannalta. Oppitunneilla hyödynnetään kerronnallisuutta ja tuntitehtävät suoritetaan pareittain suullisten ja kirjallisten ohjeiden perusteella.

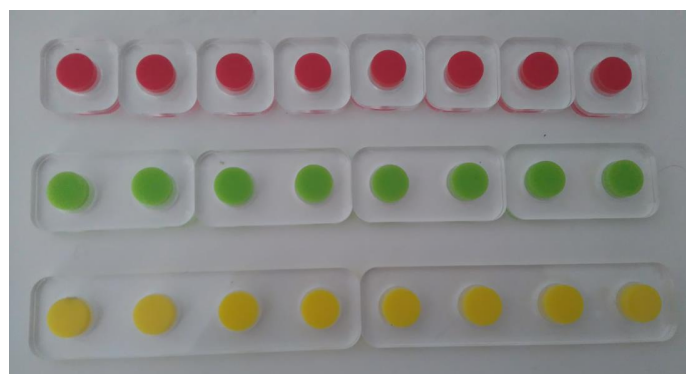
Ensimmäisellä oppitunnilla lähdetään liikkeelle vanhoista suomalaisista pituusmitoista, jotka motivoivat oppilaita opiskeltavaan aiheeseen, laajentavat heidän sanavarastoaan sekä tutustuttavat heidät mittaamisen historiaan. Kertomuksen (kuva 6.4) avulla käsitellään sitä, mitä kaikkea pituuden mittaamisella tarkoitetaan. Ensimmäi-

Jaakko ja Anna hiihtivät peninkulman (7km) matkaansa koululta kotiin. Jaakko hiihti sylinmitan (2m) Annaa edellä, sillä vanhempansa hän jaksoi paremmin hiihtää auraamattomalla ladulla. Jaakon teki mieli oikaista järven jään poikki suoraan kotiin, sillä suojakelillä hiihtäminen oli raskasta lumen tarttuessa kiinni suksenpohjiin. Hän kuitenkin muisti hyvin mummon varoituksen sanat: parempi virsta (2,5km) väärään kuin vaaksa (21 cm) vaaraan. Niinpä lapset hiihtivät turvallista reittiä järven ympäri kotiin, vaikka matka tuntuikin kovin pitkältä raskaan koulupäivän jälkeen.

Kuva 6.4: Ensimmäiselle oppitunnille suunniteltu tarina. Sulkeiden sisällä olevia SI-järjestelmän mukaisia pituusmittoja ei lueta oppilaille ääneen.

sellä tunnilla oppilaat käyttävät omaa kehoaan mittavälineenä mittaamistehtävissä, sillä tutkimusten [40, 117] mukaan (kpl 4.2) oppilaiden on luontevaa siirtyä standardeihin mittoihin suoritettuaan mittauksia ensin epästandardeilla mitoilla. Käyttämällä omaa kehoa on tarkoituksena hahmottaa mitattavia pituuksia suhteessa itseensä, sekä havaita ja ymmärtää standardimittojen tarpeellisuus.

Toista oppituntia varten oppilaille valmistetaan etukäteen 20 cm pitkät pahvimitat. Oppilaat harjoittelevat pituuden mittaamista lukumääräpalojen avulla selvittäessään pahvimitan pituutta. Oppilaille ennestään tutuilla lukumääräpaloilla havainnollistetaan pituusyksikön valinnan merkitystä ja sisältöjaon ideaa mitan käsitteen yhteydessä. Oppilaat saavat vapaasti valita haluamansa mittayksikön suorittaessaan mittausta ja pahvimitan pituuden selvittyä oppilaita ohjataan käyttämään mitasta nimeä *kasimita* käytössä olevien lukumääräpalojen mukaisesti (kuva 6.5). Mitan nimi valittiin yhdessä Solmu-materiaalin kehittäjän kanssa.



Kuva 6.5: Esimerkki *kasimitan* pituuden selvittämiseksi käytettävistä lukumääräpaloista.

Oppilaat valmistavat käsityötunnilla puiset metrin mitat seuraavaa matematiikan oppituntia varten. Oppilaat mittaavat ensin metrin mittaiset narut lattiaan liimatun mallimitan avulla, jonka jälkeen he sahaavat rimasta narun mittaiset pätkät. Tutkijaopettajan tulee tarkistaa oppilaiden mittaukset ennen ja jälkeen sahauksen, eikä oppilaille kerrota mittojen pituutta ennen seuraavaa tuntia.

Kolmannella matematiikan oppitunnilla käsitellään mittayksikköä metri. Oppilaita pyydetään arvioimaan metrin suuruutta asettamalla kädet metrin etäisyydelle toisistaan, minkä jälkeen käsien eteen asetetaan oppilaan valmistama mitta. Oppilaille kerrotaan näiden mittojen olevan täsmälleen metrin mittaisia. Käyttäessään konkreettisia mittoja oppilaat hahmottavat metrin suuruusluokan ja löytävät mitalle käyttötarkoituksia mitatessaan luokasta löytyviä pituuksia. Metrin mittoja hyödynnetään pistetyöskentelyssä, jonka aikana oppilaat kiertävät kolme mittaamista sisältävää toiminnallista pistettä, joissa verrataan luokasta löytyviä pituuksia metriin, mitataan luokan pituus ja merkitään metrin korkeus omaan kehoon. Jokaisella pisteellä on aikuinen auttamassa ja ohjeistamassa, mutta tehtävien toteutuksen pääpaino on oppilailla itsellään. Pistetyöskentelyn aikana oppilaat huomaavat mittayksikön säilyvän ja ymmärtävät säilymisen hyödyt vertaillen saamiaan tuloksia.

Neljännellä oppitunnilla siirrytään metrissä senttimetriin tutkimalla, kuinka monta senttimetriä metriin sisältyy. Oppilaat mittaavat viivoittimella *kasimitan* pituuden (20 cm), minkä jälkeen he tutkivat, kuinka monta kasimitaa sisältyy metrin mittaan. Tämän perusteella muodostetaan laskutoimitus, jonka oppilaat ratkaisevat haluamallaan tavalla summana tai tulona. Toiminnallisuudella pyritään saamaan oppilaille konkreettinen mielikuva mittayksiköiden välisestä suhteesta. Opetussuunnitelman

sisältämän metrin ja senttimetrin lisäksi esitellään millimetrin ja desimetrin käsitteet sekä harjoitellaan mittayksiköiden suuruuksia mittalorun avulla hyödyntämällä Ikäheimon suunnittelemaa tukipistemenetelmää [97]. Tunnilla tehdään lisäksi perinteisiä yksikkömuunnoslaskuja.

Viidennellä oppitunnilla pidetään oppimista arvioiva yksilöharjoitus pituuskäsitteestä ja mittaproseduureista (liite B), jonka yhteydessä testataan myös mekaanisia yksikkömuunnoksia. Kirjallisen harjoituksen lisäksi oppilaat saavat konkreettisesti testata oppimiaan mittaamiseen liittyviä taitoja pistetyöskentelynä ongelmanratkaisutehtävien parissa.

Massa (paino)

Kuudennella ja seitsemännellä oppitunnilla käsitellään painoa. Kappaleiden massaa ja painoa tutkittaessa käytetään systemaattisesti käsitettä paino (ks. s. 39). Arkikielessä massasta ja painosta puhutaan ikään kuin synonyymeinä, ja käsitteiden varsinainen ero tulee opetuksessa konkreettisesti esiin vasta yläkoulun puolella. Oppikirja-analyysin tulosten pohjalta havaittiin kirjoissa käytettävän vaihtelevasti molempia käsitteitä, mutta yhdessäkään analysoidussa oppikirjassa ei kerrottu oppilaille käsitteiden eroa. Massa- ja painokäsitteitä käytettiin oppikirjoissa myös toistensa synonyymeinä, minkä koettiin olevan harhaanjohtavampaa kuin pelkän painokäsitteen käyttäminen.

Painokäsitettä lähestytään pituuskäsitteen mukaisesti tarinallisuutta (kuva 6.6), keskustelua ja oppilaiden omien ajatusten kielentämistä hyödyntäen. Keskustelulle varataan riittävästi aikaa, jotta paino tulee tutuksi jokaiselle oppilaalle. Painon yh-

Jaakko ja Anna olivat jälleen hiihtäneet koulusta kotiin. Alkoi olla viimeisiä päiviä hiihtää, sillä aurinkoiset kelit olivat sulattaneet lumen niin ohueksi, että maa jo pilkkotti paikka paikoin hiihtoreitin vieressä. Hiihtomatkan aikana Anna oli valittanut, kuinka painava koulureppu hänellä oikein onkaan. Jaakko oli kuitenkin sitä mieltä, että kyllä hänen reppunsa oli paljon painavampi kuin Annan. Kotiin päästyään lapset ryhtyivät vertailemaan koulureppujensa painoa, mutta eivät päässeet yhteisymmärrykseen siitä, kumman reppu oikeasti oli painavampi. Anna kokeili vuorotellen selkäänsä sekä omaa että Jaakon reppua ja hänen mielestään molemmat olivat yhtä painavia. Jaakko sen sijaan kokeili, kuinka monta kertaa hän jaksaa nostaa oman repun maasta ylös ja kuinka monta kertaa Annan repun. Miksi lasten kokeilemat keinot eivät toimineet? Kuinka lapset voisivat kotikonstein selvittää, kumman reppu painoi enemmän?

Kuva 6.6: Painokäsitteeseen liittyvä tarina.

teydessä käsitellään vain yksiköt kilogramma ja gramma, sillä milligramman, senttigramman ja desigramman käsitteet koetaan vaikeiksi hahmottaa, eikä niitä vaadita 2. luokan matematiikassa [95]. Valintaan vaikutti lisäksi se, ettei edellä mainittuja mittayksiköitä käsitellä oppikirjoissakaan ennen kuin 5. tai 6. luokalla. Painon

punnitsemiseen liittyvät tehtävät ovat niin ikään toiminnallisia ja tehtävissä hyödynnetään ongelmaperustaisen oppimisen piirteitä, sekä sisältöjaon ideaa samassa hengessä pituuden mittaamisen oppituntien kanssa.

Ensimmäinen painoa käsittelevä oppitunti on käsitteen ymmärtämistä vahvistava ja oppilaiden omat kokemukset sidotaan oppitunnin kulkuun keskustelun ja yhteisen pohdinnan avulla. Käsitteen lisäksi tunnilla tutustutaan massan (painon) yksikköön, kilogrammaan. Huomio kiinnitetään tasapainovaa'an käsitteen ymmärtämiseen ja vaa'an toiminnan hahmottamiseen konkreettisin harjoituksin.

Toisella oppitunnilla vahvistetaan oppilaiden käsitteellistä ymmärtämistä sekä tutustutaan erilaisiin vaakoihin. Painon punnitsemiseen käytetään tasapainovaa'an lisäksi sekä digitaalisia että manuaalisia keittiövaakoja monipuolisten kokemusten takaamiseksi. Erilaisten punnitusvälineiden rinnalla tunnin keskeiseksi aiheeksi nostetaan kilogramman ja gramman välinen yhteys.

6.3 Empiirinen ongelma-analyysi 2

Koin tarpeelliseksi suorittaa esitestauksen kehittämälleni oppimateriaalille. Asetin esitestauksen, eli empiirisen ongelma-analyysin 2, tavoitteeksi materiaalin toimivuuden havainnoimisen tehtävien ulkonäön ja kieliopin osalta. Toiseksi tavoitteeksi asetin oppilaiden suhtautumisen ja osallistumisen havainnoimisen.

Suoritin laaditun materiaalin toimivuuden ja käytettävyyden arvioinnin laadullisena tapaustutkimuksena lounaissuomalaisen alakoulun yhdysluokalla 1–2 helmikuussa 2016. Käytin alustavaa oppimateriaalia intensiivisesti kolmen päivän aikana pidettyjen usean mittaamista käsittelevän oppitunnin aikana. Oppitunnit videoitiin ja keräsin käytetyn materiaalin talteen myöhempää tarkastelua varten. Kirjasin oppitunneista kootut havainnot ylös. Toteutin tunnit hyvin oppilaslähtöisesti elämyksiä, toiminnallisuutta ja ongelmaperustaista oppimista hyödyntäen oppilaiden ollessa itse aktiivisia toimijoita.

Muistiinpanojeni ja havaintojeni sekä esitestausluokan oman opettajan tekemien havaintojen pohjalta kirjasin ylös materiaalista esiin nousseita käytännön asioihin ja ymmärtämiseen liittyviä epäkohtia. Havainnoin myös oppilaiden suhtautumista ja työskentelyä. Hyödynsin huomioita materiaalin jatkokehittämisessä materiaalin kehittämisvaiheessa II.

6.4 Materiaalin kehittämisvaihe II

Jatkokehitin alustavaa oppimateriaalia esitestauksen ja kehittämisvisioni pohjalta edelleen kohti oppimateriaalille määrittelemiäni tavoitteita (s. 39). Lisäksi pohdin materiaalin toimivuutta varsinaiseen testaukseen osallistuvan luokanopettajan sekä Solmu-ohjelman kehittäjän kanssa.

Esitestauksen perusteella oppilaat suhtautuivat materiaaliin innostuneesti ja kiinnostuneesti. Toiminnalliset ja ongelmaperustaiset tehtävät koettiin esitestaukseen osallistuneen luokan oman opettajan ja tutkijaopettajan havaintojen perusteella mielekkäiksi ja motivoiviksi. Kehitin materiaalia myönteisten kokemusten perusteella

entisestään teoriataustaa vastaavaksi (luku 4). Olin asettanut esitestauksessa painoarvon materiaalin toimivuudelle, joten kiinnitin erityistä huomiota käytännön toimivuuteen ja selkeyteen kehittämisvaiheen II aikana. Lyhensin ja selkeytin tehtävämönisteiden tehtävänantoja ja ohjeistuksia numeroimalla ja jakamalla ohjeet omille riveilleen. Muokkasin monisteiden ulkoasua selkeämmäksi lisäämällä suuret ruudukot, joihin vastaukset kirjoitettaisiin ja piirrettäisiin. Annoin tehtävien vastauksille lisää tilaa suurentamalla rivivälejä. Lisäksi valmistin konkreettisia apuvälineitä, kuten paperiset erikokoiset jalkapohjan mallikuvat auttamaan mitan käsitteen hahmottamisessa.

Tässä vaiheessa loin tuntitehtävien rinnalle jokaiselle oppitunnille kotitehtävämönisteet, jotka toimivat jatkumona tunnin tehtäviin sekä alustuksena seuraavan tunnin aiheeseen. Kotitehtävät luotiin toiminnallisiksi ja ongelmaperustaista oppimista hyödyntäviksi, matematiikan eri kieliä yhdistäviksi kokonaisuuksiksi.

Kehittämisvaiheen aikana tuntisuunnitelmat tarkentuivat ja tuntikokonaisuudet saivat lopullisen jaon tehtävien ja aiheisältöjen suhteen. Kehitin esitestausvaiheessa havaittujen myönteisten kokemusten pohjalta uusia taustatarinoita jo olemassa olevien tarinoiden rinnalle. Koin pituuden mittaamiseen suunnittelemani konkreettiset välineet varsin toimiviksi, mutta massan havainnoimiseen jäi tarve kehittää konkreettisia apuvälineitä. Koska valmiita tasapainovaakoja ei ollut saatavilla, valmistin henkareista tasapainovaa'at koukkujen ja kiinnittimien avulla. Lisäksi valmistin litran maitopurkeista neljän punnuksen sarjat ja kirjasin purkkien kylkeen numerot 1-4. Täytin kaikki samalla numerolla numeroidut purkit samalla aineella, joko makaronilla, herneillä, vedellä tai jätin kokonaan tyhjäksi. Punnnitsin purkit ja varmistin jokaisen sarjan painavan yhtä paljon.

Suunnittelin kilogramman ja gramman välisen yhteyden löytymiseksi toiminnallisen ongelmanratkaisutehtävän yhdistämällä yksilötyöskentelyn koko luokan toimintaan. Luokan tehtävänä oli punnita yhteensä 1 kg riisiä. Jokainen punnitsi pakastepussiin 100 grammaa riisiä, jonka jälkeen pussi vietiin yhteisvaakaan. Yhteisvaa'an lukemaa seurattiin, kunnes saatiin 1 kg täyteen (kuva 6.7). Näin mittayksiköiden välinen suhdeluku saatiin esiin konkreettisesti ja havainnollisesti.

1. Täyttäkää pakastepussi 100 grammalla riisiä. Molemmat täyttävät oman pussin.
2. Kuinka monta samanlaista pussia tarvitaan, jotta pussit painavat yhteensä kilogramman?

10 Riisipussia
 $10g \cdot 100g = 1000kg$
V: 1000kg

Kuva 6.7: Kilogramman ja gramman välinen suhde. Vastauksessa näkyy oppilaan tekemä yksikkövirhe.

Jatkoin materiaalin kehittämistä myös varsinaisen testaamisen alettua¹. Tällöin suunnittelin oppimisen arvioimiseen tarkoitetut pituutta ja massaa käsittelevät yk-

¹Kehittämisvaiheen III tunti- ja kotitehtävät sekä osaamista arvioivat tehtävät ovat ladattavissa osoitteesta <https://drive.google.com/open?id=0BzWDtelpVN1vaDR5TDkwbDNTNm8>.

silöharjoitukset. Materiaalin testausvaiheessa havaitsin lisäksi tarpeen perinteisille yksikkömuunnosharjoituksille. Kehitin tässä vaiheessa myös palaute- ja itsearviointilomakkeen (liite C).

6.5 Empiirinen ongelma-analyysi 3

Suoritin empiirisen ongelma-analyysin eli kehitetyn oppimateriaalin varsinaisen testauksen laadullisena tapaustutkimuksena Tampereella maaliskuussa 2016. Tutkimukseen osallistuneessa 2. luokassa oli 24 oppilasta, joista 8 oli tyttöjä ja 16 poikia. Matematiikan oppitunteja pidettiin viikossa kolme, joista yksi oli jakotunti. Sain alkuperäisestä suunnitelmasta (7×45 min) poiketen tutkimuskäyttöön kahden ja puolen viikon matematiikan oppitunnit eli yhteensä kahdeksan oppituntia, sillä tutkimuksen edetessä huomattiin massan punnitsemiseen tarvittavan kahden oppitunnin sijaan kolme. Lisäksi sain kaksi käsityötuntia osittain tutkimuskäyttöön metrin mittojen valmistamista varten. Kuvasin seitsemän oppituntia videolle ja kirjasin kaikista oppitunneista muistiinpanoja. Käsityötuntien ohessa tehtyjen metrin mittojen valmistusta ei käytännön syistä kuvattu videolle toiminnan tapahtuessa sekä sisällä että pihalla. Viimeistä matematiikan oppituntia ei videoitu, sillä tunti koostui yksilötehtävänä tehdystä massaan liittyvien proseduurien ja konseptien osaamista mittaavasta kirjallisesta tehtävästä, jonka tehtyään oppilas siirtyi suoraan omaa tahtia seuraavan aineen pariin. Litteroin videot sanatarkkuudella ja keräsin kaikki tunnilla tehtyt tehtävät sekä kotitehtävät oppilailta talteen nimellä varustettuna.

Jokaisella oppitunnilla avoin keskustelu ja oppilaiden omat ajatukset olivat tärkeässä roolissa ja oppilaat toimivat itse aktiivisina tiedon rakentajina. Tunnit aloitettiin lyhyellä opettajajohtoisella osuudella, jonka jälkeen oppilaat ryhtyivät pareittain tai kolmen hengen ryhmissä ratkaisemaan tunnin aiheena olevaa ongelmaa toiminnallisuuden kautta. Lähes kaikki suunnittelemani tehtävät oli mahdollista tehdä muualla kuin oman pulpetin ääressä ja oppilaat saivat vapaasti ratkaista tehtäviä haluamallaan tavalla. Keskustelulle jätettiin riittävästi aikaa joko tunnin alkuun tai loppuun, jolloin oppilaat myös kielensivät matemaattista ajatteluaan. Kuvaan seuraavaksi ensimmäisen oppitunnin kulun esimerkkinä tämän kehittämistutkimuksen suorittamisesta.

Aloitin ensimmäisen oppitunnin pituuden mittaamiseen liittyvällä tarinalla (s. 40), jossa esiintyi vanhoja suomalaisia pituusmittoja, kuten peninkulma, sylinmitta, virsta ja vaaksa. Kerroin oppilaille ennen tarinan alkua pituusmittojen olevan todennäköisesti heille uusia ja vieraita ja pyysin heitä kuuntelemaan tarkkaan tarinasta kaikkea pituuden mittaamiseen liittyvää. Oppilaat löysivät tarinasta kaikki siellä esiintyvät pituusmitat ja keksivät hyvin selityksiä itselleen vieraille sanoille, joskin peninkulman ajateltiin aluksi liittyvän jollakin tapaa kulmien mittaamiseen. Tarinan ja sen jälkeen syntyneen keskustelun avulla oppilaat pohtivat minkälaisia mittavälineitä omasta kehosta löytyisi ja mitä mittaamisella oikein tarkoitetaan. Lisäksi pohdittiin pituuteen liittyviä käsitteitä leveys, korkeus ja etäisyys.

Keskustelun jälkeen oppilaat lähtivät pareittain toteuttamaan tuntitehtävää (kuva 6.8), jossa he saivat vapaasti valita luokahuoneesta jonkin pituuden, jonka halusivat selvittää. Pituuden mittaamisessa he saivat käyttää omasta kehosta löytyviä

Mitä mitataan	Millä mitataan	Arvioitu pituus, leveys tai etäisyys	Mitattu pituus, leveys tai etäisyys	Kuinka paljon mitattu pituus eroaa arvioidusta
Eläinmitanin/h	kolme jalalla	2 jalalla	2 jalkaa ja 3 vaakkaa	3 vaakkaa
pulpetti	vaaksalla	7 vaakkaa	8 puoli	puoltaista vaakkaa

Kuva 6.8: Osa ensimmäisen oppitunnin mittaustehtävää. Tehtävässä tuli mitata ha-luamallaan kehonosalla jokin luokasta löytyvä pituus sekä arvioida ennen mittauksen suorittamista mittaustuloksen suuruus.

mittavälineitä, kuten jalkoja, käsiä, vaaksoja ja neniä. Tehtävä suoritettiin pareittain. Kun toinen mittasi, tuli toisen seurata ja varmistaa mittauksen tarkkuus eli pitää huolta, ettei tulisi päällekkäisyyksiä tai vastaavasti jäisi rakoja mittavälinettä siirrettäessä. Ennen tehtävän aloittamista kävin yhdessä oppilaiden kanssa läpi, mitä tarkalla ja huolellisella mittaamisella tarkoitetaan. Oppilailla oli vapaus valita itsenäisesti sekä mitattava pituus että mittaväline, jolloin mittausvaiheessa korostui valinnan järkevyys. Ennen varsinaisen mittauksen suorittamista parin tuli arvioida mittaustulos kirjallisesti, johon lopullista tulosta verrattaisiin. Tehtävän tarkoituksena oli tehdä mittaproseduurit tutuiksi ja harjaannuttaa arvioimisen ja vertailun taitoja. Mitan käsitteiden oikeaan käyttöön kiinnitettiin huomiota keskustelujen aikana.

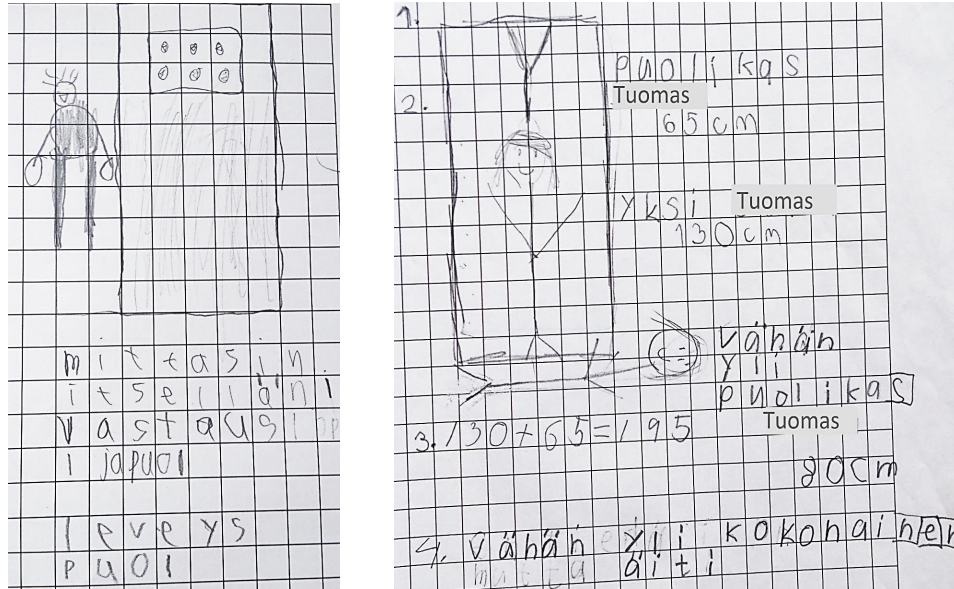
Lopputunnista käytiin yhdessä läpi oppilaiden saamia mittaustuloksia. Tulosten yhteydessä mietittiin, saivatko eri ryhmät saman pituuden mittaamisesta saman vai eri tuloksen. Kerroin tunnin lopussa tarinan kuninkaasta, joka tilasi kuningattarelle

Kuningas päätti tilata kuningattarelle syntymäpäivälahjaksi uuden sängyn. Hän mittasi kuningattaren pituuden ja leveyden ja ilmoitti valtakunnan taitavimmalle puusepälle tilaavansa kuusi jalkaa pitkän ja kolme jalkaa leveän sängyn. Sänky toimitettiin kuningattarelle tämän syntymäpäivän iltana ja kuningatar nukkui heti seuraavan yön uudessa sängyssään. Aamulla hän kuitenkin valitti kuninkaalle huonosti nukutusta yöstä, sillä kuningatar oli joutunut nukkumaan koko yön jalat kaksin kerroin kippurassa! Taitavin puuseppä oli myös valtakunnan pienijalkaisin mies. Siitä lähtien valtakunnassa mitattiin kaikki kuninkaan jalalla!

Kuva 6.9: Perinteinen esimerkkitarina kuninkaasta, joka tilasi kuningattarelle uuden sängyn. Kyseinen versio on kirjoitettu ja muokattu tätä tutkimusta varten.

sängyn. Tarina toimi tunnin aiheen kokoajana ja sai oppilaat pohtimaan mittavälineen valinnan tärkeyttä. Tarina kuninkaasta ja sängystä on varsin tunnettu esimerkkitarina ja kuvassa 6.9 on tätä tutkimusta varten kirjoitettu versio siitä.

Tarinan jälkeen jaoin oppilaille kotitehtävämonisteen ja kerroin, että keräisin



Kuva 6.10: Oppilaiden *H* ja *K* vastaukset ensimmäiseen kotitehtävään. Oppilaan *K* kotitehtävässä oppilaan nimi on muutettu.

sen seuraavalla tunnilla heiltä talteen. Oppilaat kaipasivat ohjeistusta kotitehtävän tekemiseen, joten kävin kotitehtävämonisteen oppilaiden kanssa tarkasti läpi. Hämmennystä aiheutti monisteella oleva iso ruudukko, johon oppilaan tuli sekä piirtää että kirjoittaa saamansa vastaukset. Kotitehtävä jatkoi tunnin aihetta käsittelemällä oman sängyn mittaamista valitsemallaan kehonosalla. Kotitehtävässä tuli lisäksi pohtia, minkälaisen tuloksen äiti tai isä saisi samasta mittauksesta. Kuvassa 6.10 ovat kahden oppilaan vastaukset ensimmäiseen kotitehtävään.

7 Tulosten tarkastelu

Tässä luvussa esittelen kehittämistutkimuksesta saadut tiedot ja tulkinnot. Kaikki saamani tieto on sosiaalisesti konstruoitua, eikä tuloksista saada selville yhtä totuutta, vaan sen sijaan tulkintoja ja niiden pohjalta tehtyjä johtopäätöksiä.

Sain empiirisellä oppikirja-analyysillä vastauksen tutkimuskysymykseen, millainen on pituuden ja massan opetus 2. luokan matematiikan oppikirjojen näkökulmasta. Toiseen tutkimuskysymykseen sain vastauksen teoreettisen ongelma-analyysin avulla, kun tarkastelin luvuissa 3 ja 4 mittaamisen historiaa ja selvitin minkälainen toiminnallista ja ongelmaperustaista oppimista sekä konseptuaalisen ja proseduraalisen tiedon samanaikaista kehittymistä hyödyntävä materiaali tukee mittaamisen oppimista. Kolmanteen tutkimuskysymykseen eli siihen, miten tässä kehittämistutkimuksessa kehitetty oppimateriaali soveltuu pituuden ja massan opetukseen, hain vastausta empiirisen tapaustutkimuksen tuloksista analysoimalla videolle kuvatut oppitunnit ja oppilaiden tekemät tunti- ja kotitehtävät sekä mielipidekysely- ja itsearviointilomakkeen. Lisäksi kuvaan tässä luvussa tutkimusluokan luokanopettajan haastattelun. Olen nimennyt kunkin oppilaan juoksevilla järjestyksellä kirjaimin A – X, joihin tulosten tarkastelussa viitataan erottaakseni oppilaiden vastaukset toisistaan. Analysoidessani tehtävien vastauksia ilmaisen kunkin tehtävän yhteydessä vastaajien lukumäärän, sillä en saanut jokaiseen tehtävään kaikkien oppilaiden vastauksia poissaolojen tai läksyunohdusten vuoksi.

7.1 Empiirinen oppikirja-analyysi

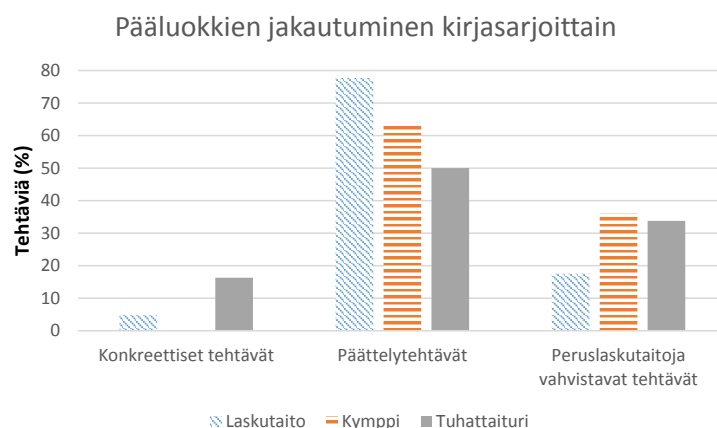
Sain empiirisellä oppikirja-analyysillä vastauksen ensimmäiseen tutkimuskysymykseen eli siihen, millainen on pituuden ja massan opetus 2. luokan matematiikan oppikirjojen näkökulmasta. Kolmessa analysoidussa oppikirjassa (*Kymppi* [93], *Laskutaito* [73], *Tuhattaituri* [126]) oli yhteensä 320 pituuden ja massan mittaamista käsittelevää tehtävää. Eniten pituuden ja massan mittaamiseen liittyviä tehtäviä oli *Laskutaidossa* (148 kpl), kun *Kympissä* ja *Tuhattaiturissa* molemmissa oli 86 tehtävää (taulukko 7.1). Tehtävät jakautuivat kaikissa analysoiduissa oppikirjoissa sa-

Taulukko 7.1: Kolmen analysoidun oppikirjan tehtävät luokiteltuina pituuden ja massan mittaamisen tehtäviin. Kolmessa kirjassa oli yhteensä 320 tehtävää.

Kirjasarja	Tehtäviä (lkm)		Tehtäviä (%)	
	Pituus	Massa	Pituus	Massa
Kymppi	67	19	78	22
Laskutaito	111	37	75	25
Tuhattaituri	73	13	85	15
Yhteensä	251	69	78	22

mansuuntaisesti pituuden ja massan tehtäviin. *Tuhattaiturin* mittaamistehtävistä 85% oli pituuteen liittyviä tehtäviä, *Kympissä* 78% ja *Laskutaidossa* 75%. Oppikirjojen tehtävien lukumäärissä oli selvä painotus pituuden mittaamiseen massan jäädessä vähemmälle huomiolle. Vankkaa pituuskäsitteen ymmärtämistä tarvitaan edelleen pinta-alan ja tilavuuden ymmärtämisessä, joten painotus selittyy sillä. Liitteen A kuvassa 4 näkyy tehtävien jakautuminen eri oppikirjojen välillä.

Analyysin käsitteellistämisvaiheen aikana muodostin kolme pääluokkaa yhdistelemällä ryhmittelyvaiheen tehtäviä edelleen tehtävätyypin perusteella konkreettisiin tehtäviin, päättelytehtäviin ja peruslaskutaitoa vahvistaviin tehtäviin (kappale 6.1). Kuvassa 7.1 on esitetty tehtävätyyppien jakautuminen kirjasarjoittain kolmeen eri pääluokkaan. Peruslaskutaitoa vahvistavia tehtäviä oli *Kympissä* (36%) ja *Tuhat-*



Kuva 7.1: Kolmeen pääluokkaan jaettujen tehtävien jakautuminen oppikirjoittain prosentteina ilmaistuna. *Laskutaidossa* oli 148 tehtävää, *Kympissä* ja *Tuhattaiturissa* 86 tehtävää.

taiturissa (34%) suhteessa tehtävien kokonaismäärään lähes yhtä monta, *Laskutaidossa* kahta edellistä vähemmän (18%). Peruslaskutaitoa vahvistavat tehtävät olivat selviä pituusyksiköineen tehtäviä yhteen- ja vähennyslaskuja sekä mekaanisia yksikkömuunnostehtäviä. Yksikkömuunnokset ovat tärkeitä kymmenjärjestelmän vahvistamisen ja suhteiden ymmärtämisen kannalta. Tämän ryhmän tehtävät vahvistavat oppilaan peruslaskutaitojen proseduraalista kehittymistä ja tehtävät, joissa viivoitinta käytettiin apuna pisteiden yhdistämisessä, harjoittivat oppilaan taitoa hyödyntää viivoitinta suorien viivojen piirtämisessä. Tehtävät eivät kuitenkaan harjoita mittaamisessa tarvittavia proseduureja mittayksikkömuunnosten lisäksi, eikä tehtävien tekemiseen tarvita mittaamisen konseptuaalisen tiedon ymmärtämistä. Vastaavasti Yhdysvalloissa Smith kumppaneineen [117] havaitsi tutkiessaan oppikirjojen (vuosiluokat 0-3) sisältämien tehtävien jakautumista proseduraalista tietoa ja konseptuaalista tietoa vahvistaviin, että pääosa tehtävistä kehitti proseduraalista osaamista.

Päättelytehtäviä eli soveltamista, arviointia ja puhtaasti päättelytaitoa vaativia tehtäviä oli *Tuhattaiturissa* 50%, *Kympissä* 64% ja *Laskutaidossa* hieman muita

kahta enemmän, 78%. Päättelytehtäviä ja peruslaskutaitoa vahvistavia tehtäviä oli kokonaisuudessaan selvä enemmistö kaikkien kolmen kirjasarjan tehtävistä. Tähän tehtäväkategoriaan sisältyivät myös sanalliset tehtävät.

Konkreettisia tehtäviä, joihin lukeutui muun muassa oppilaiden konkreettiset pituuden mittaamiset kirjan kuvasta, oli selvästi vähemmän kuin kahden muun tehtäväkategorian tehtäviä. *Laskutaidossa* tehtävistä vain 5% ja *Tuhattaiturissa* 16% oli konkreettisiksi luokiteltavia tehtäviä, *Kympissä* ei yllättäen ainuttakaan. Tekeillä pelkästään oppikirjojen "mittaa kuvasta janan pituus" -tehtäviä, ei oppilaille synny käsitystä esimerkiksi mittavälineen siirrettävyydestä eli mittayksiköiden iteratiivisuudesta. Myös tämän ryhmän tehtävät vahvistavat pääasiassa proseduraalista osaamista.

Oppikirjojen tehtävistä yksikään ei lukeutunut tässä tutkielmassa määrittelemiini (kappale 4.3) toiminnallisiin tehtäviin, joissa oppilaan oma aktiivinen rooli on tärkeä ja olennainen osa oppimista. Esimerkiksi tehtävät, joissa oppilaan tulee valita kuvassa näkyvään esineeseen tai asiaan sopivin pituus tai massa muutamasta eri vaihtoehdosta, eivät tarjoa oppilaalle todellista kokemusta opittavasta asiasta. Kirjojen tehtävät olivat siis järjestään perinteisiä kynä ja paperi -tehtäviä, mittausharjoituksetkin pitäytyivät viivojen tai kuvien pituuden mittaamiseen suoraan oppikirjan sivuilta. Massaa käsittelevissä osioissa ei ollut yhtäkään konkreettiseksi luokiteltavaa tehtävää.

Kympissä mittaamisesta oli muodostettu jakso, johon sisältyivät käsitteet aika, tilavuus, pituus ja paino. Pituudesta kirjassa käsiteltiin yksiköt millimetri, senttimetri, metri ja kilometri, painosta yksiköt gramma ja kilogramma. Oppikirjan tehtävissä käytettiin systemaattisesti massan sijaan käsitettä paino eikä massa-käsitettä esiintynyt kertaakaan. Opettajanoppaassa valintaa perusteltiin painon olevan terminä oppilaille tutumpi kuin massan, lisäksi massan todettiin tulevan käsitteenä myöhemmin fysiikan yhteydessä. Mittaaminen sijoittui oppikirjassa viimeiseksi alueeksi ennen kertausjaksoa.

Laskutaidossa mittaamisesta oli niin ikään oma jakso, johon sisältyivät käsitteet raha, pituus, massa ja tilavuus. Pituuden yhteydessä käsiteltiin yksiköt senttimetri ja metri, massan yhteydessä yksiköt gramma ja kilogramma. Oppikirjassa esiteltiin massan yksiköksi kilogramma, mutta tehtäväosioissa massa- ja painokäsitettä käytettiin molempia riippuen tehtävätyypistä. Valinta- ja arviointitehtävissä käytettiin käsitettä massa, mutta "kuinka paljon painaa" tyypisissä tehtävissä terminä käytettiin painoa. Mitan käsitteiden valinnasta ei ollut opettajanoppaassa perusteluja. Mittaamisjakso oli kirjan viimeinen osio ennen kertaavaa jaksoa.

Tuhattaiturissa pituuden ja painon mittaamisen osioita oli jaoteltu kahteen eri jaksoon, joista ensimmäisessä käsiteltiin tilavuutta, viivoittimen käyttöä ja pituuden mittaamista. Toinen osio sisälsi käsitteet pituus ja paino. Mittayksiköistä pituuden ja painon yhteydessä on käsitelty millimetri, senttimetri, metri, kilometri, gramma ja kilogramma. Oppikirjan tehtävissä käytetään termiä paino massan sijaan eikä valintaa oltu perusteltu. Varsinainen mittaamisjakso oli sijoitettu kevään viimeiseksi osioksi.

Pituuden ja massan mittaamiseen liittyvien toiminnallisten tehtävien tuomia mahdollisuuksia ei ole hyödynnetty tutkittujen oppikirjojen tehtävissä. Ilman omia kokemuksia mittayksiköiden suuruuksista ja mittavälineiden käytöstä oppilaille ei synny

arkielämään yhdistettäviä kokemuksia, jotka helpottaisivat opittavan asian ymmärtämistä ja muistamista [97]. Puhtaasti oppikirjoihin pohjautuva opetus ei tarjoa pituuden ja massan mittaamiseen monipuolista oppimisympäristöä, ja mittayksiköiden yhteys mitan käsitteisiin jää irralliseksi ilman todellisia kokemuksia. Vaikka opettajat ovat tutkimusten [53] mukaan tyytyväisiä opettajanoppaiden käsitteiden syvällisempiin esittelyihin, en tämän oppikirja-analyysin perusteella opettajanoppaista löytänyt riittäviä perusteluja tai ohjeita massakäsitteen käyttämiseen tai käyttämättä jättämiseen.

Analysoitujen oppikirjojen tehtävät kehittävät oppilaiden proseduraalista osaamista yksikkömuunnosten ja peruslaskutaitojen toistamisella kappale kappaleelta. Tehtävät eivät sen sijaan anna mahdollisuutta konseptuaalisen tiedon kehittymiselle, eivätkä tehtävätyypit mittaa käsitteellisen ymmärtämisen tasoa. Matematiikan oppikirjojen ja opettajanoppaiden on todettu ohjaavan opettajien toimintaa ja valintoja oppitunneilla [89, 90]. Oppikirjojen tahdittama aukeama tunnissa -eteneminen määrittelee mitan käsitteiden opettamiseen käytettävän ajan ja opettajanoppaan ehdottama tuntirakenne sekä opetusvinkit rajaavat opittavat asiat kirjojen sisältöön: oppikirjat menevät merkityksessään jopa opetussuunnitelman edelle (mm. [89, 69, 101]). Joutsenlahden ja Vainionpään [53] mukaan vain oppikirjoihin painottuvan opetuksen vaarana on, että oppimateriaali ei palvele tarkoitustaan ja strukturoi liiaksi opettajien toimintaa ja valintoja. Rutiinien rikkominen ja erilaisten lähestymistapojen hyödyntäminen matematiikan opetuksessa vapauttaisi opetuksen hyödyntämään Perusopetuksen opetussuunnitelman 2016 [95] tarjoamia raameja opetuksen toteuttamiseen [53]. Mittaamisosiot olivat jokaisessa analysoidussa oppikirjassa sijoitettu kevään viimeiseksi ennen mahdollista kertausjaksoa. Koska opettajat noudattavat oppikirjan etenemisjärjestystä on vaarana, ettei mittaamisjaksolle jää riittävästi aikaa kevään kii-reiden alla. Jakson sijoittuminen kirjan loppuun saattaa viestittää mittaamisen olevan vähemmän tärkeä aihealue matematiikassa.

Oppikirja-analyysin tulosten nojalla oli perusteltua kehittää toiminnallista ja ongelma-perustaista oppimista hyödyntävä materiaali pituuden ja massan opettamiseen.

7.2 Pituuden ja massan oppimista tukeva oppimateriaali

Teoreettisella ongelma-analyysillä (ks. luvut 3 ja 4) sain vastauksen toiseen tutkimuskysymykseen eli millainen on toiminnallinen ja ongelma-perustainen oppimateriaali, joka tukee pituuden ja massan oppimista mahdollistamalla konseptuaalisen ja proseduraalisen tiedon samanaikaisen kehittymisen. Tarkastelin mittaamisen opettamisen lähtökohtana mitan käsitteiden kehittymistä mittaamisen historian kautta, sillä käsitteiden ymmärtämisen kannalta on oleellista huomata, kuinka mitat ja mittayksiköt ovat luontevasti kehittyneet ihmisen oman toiminnan kautta. Siirtyminen epästandardeista mitoista standardeihin vei satoja vuosia, ja nykyäänkin mittaamisen opettaminen tulisi aloittaa epästandardeista mitoista mittaamisen luonteen ja periaatteen ymmärtämiseksi (ks. luku 3).

Mittaamisen opettamisen ja oppimisen haasteet ja vaikeudet tulivat esiin tarkasteltaessa mittaamistaitoja arvioivia tutkimuksia, kuten PISA [131], NAEP [44]

ja TIMSS [71]-tutkimuksia. Vastauksena pituuden ja massan opetuksen haasteille tutkin toiminnallisen ja ongelma-perustaisen oppimisen tuomia mahdollisuuksia opetuksessa. Asetin teoreettisen ongelma-analyysin pohjalta sekä empiirisestä oppikirja-analyysistä saatujen havaintojen nojalla kehitettävälle oppimateriaalille kolme pää-tavoitetta, joiden täyttymistä tarkastellaan kolmannen tutkimuskysymyksen yhteydessä tutkittaessa kehitetyn materiaalin soveltumista pituuden ja massan opetukseen. Tavoitteet olivat seuraavat:

1. Oppimateriaali liittyy oppilaan arkeen ja materiaalin avulla oppilas pystyy kehittämään sekä konseptuaalista että proseduraalista osaamistaan sekä saa konkreettisia käsityksiä siitä, missä, miten ja miksi mitan käsitteitä ja mittayksiköitä käytetään.
2. Oppimateriaalin tehtävät hyödyntävät toiminnallista ja ongelma-perustaista oppimista ja kehittävät näissä tarvittavia taitoja, kuten yhteistyötaitoja, kriittistä ajattelua, tiedon soveltamista, kokonaisuuksien hahmottamista, toimimista aktiivisena oppijana ja kykyä ottaa vastuuta omasta työskentelystä.
3. Oppimateriaali mahdollistaa oppilaan oman matemaattisen ajattelun esiintuomisen.

7.3 Materiaalin soveltuminen pituuden ja massan opetukseen

Kolmatta tutkimuskysymystä, eli miten teoreettisen ongelma-analyysin (luvut 3 ja 4) pohjalta kehitetty oppimateriaali (liite B) soveltuu pituuden ja massan opettamiseen, arvioin laadullisena tapaustutkimuksena. Kehittämistuotoksesta eli kehitetystä oppimateriaalista sain tietoa tarkastelemalla oppitunneilla kuvattuja videoita ja oppilaiden tekemiä tehtäviä sekä haastatteleamalla tunteja seurannutta luokanopettajaa. Lisäksi sain oppimateriaalin soveltuvuudesta tietoa lyhyen mielipidekysely- ja itsearviointilomakkeen avulla, jonka oppilaat tekivät viimeisen oppitunnin jälkeen kotitehtävänä.

Kehitetyllä oppimateriaalilla pyrittiin motivoivaan, oppilaita innostavaan ja kiinnostavaan työskentelyyn pituuden ja massan mittaamisen opetuksessa. Otin materiaalin kehittämisvaiheessa huomioon aikaisemman tutkimustiedon toiminnallisesta ja ongelma-perustaisesta oppimisesta sekä konseptuaalisen ja proseduraalisen tiedon samanaikaisesta kehittymisestä. Näillä valinnoilla pyrin kehittämään oppimateriaalin, jonka avulla mittaamisen oppiminen ja osaaminen kiinnitetään oppilaiden arkikokemuksiin.

Mittakonseptien ja -proseduurien osaaminen

Mitan käsitteiden oppiminen tapahtui suurimmaksi osaksi aidossa kontekstissa mittaamisen liittyessä vahvasti oppilaiden arkiympäristöön. Pituus ja massa liitettiin osaksi koulupäivää ja käsitteiden ymmärtämisessä pyrittiin määritelmien avulla koh-ti tieteellisen käsitteen ymmärtämistä. Tieteellisen ajattelun kehittyessä arkikäsitteykset ja tieteelliset käsitteykset muotoutuvat Vygotskyn [130] mukaan käsitteenmuodos-

tusprosessissa, jossa lapsi tiedostaa ensin käsitteen ja vasta sen jälkeen ymmärtää käsitteenä olevan kohteen. Arkikäsitteen kohdalla sen sijaan kehittyy ensin ymmärrys käsitteen kohteesta ja vasta sen jälkeen käsitteestä [130]. Matemaattisen tiedon duaalisen luonteen vuoksi konseptuaalinen ja proseduraalinen tieto ovat sidoksissa toisiinsa, eikä niiden kehittymistä voida suoraan erotella toisistaan. Tarkastelin oppilaiden proseduraalisen ja konseptuaalisen tiedon kehittymistä kappaleissa 4.1 ja 4.2 käsiteltyjen komponenttien pohjalta havainnoimalla oppilaiden keskusteluja ja työskentelyä tuntitehtävien parissa sekä tarkastelemalla kotitehtävien ja oppimista mittaavien tehtävien vastauksia.

Havaitsin oppilaiden proseduraalisen tiedon mittaamisesta kehittyvän oppilaiden suorittaessa opetusjakson edetessä mittauksia teknisesti oikein. Sekä epästandardeilla että standardeilla mitoilla mitattaessa oppilaat osasivat käyttää mittavälineitä oikein niin mittavälinettä pidempien kuin lyhempien pituuksien kohdalla. Ensimmäisellä oppitunnilla kolmihenkinen ryhmä mittasi pöydän leveyttä lyijykynällä. Oppilas *H* laittoi kynän pöydän toiseen reunaan ja asetti sormensa osoittamaan paikkaa, johon kynä pitäisi seuraavaksi siirtää. Siirtäessään mittavälinettä edellä kuvatulla tavalla, jäi jokaisen mittayksikön väliin sormen levyinen rako. Oppilas *R* huomautti mittaajalle asiasta, jolloin syntyi seuraava keskustelu:

R: Mutta H toi sun sormi!

H: Niinkun me mitataan siitä kymmenen. Otetaan siitä pois yks metri.

R: (nauraa) Yksi metri! Siihen tulee aina milli lisää.

H: Ompa sillä väliä kun niistä tulee yhteensä niistä väleistä sentti lisää.

Mittayksiköiden vääränlaisesta käytöstä huolimatta oppilaat ovat keskustelun pohjalta oivaltaneet yhden onnistuneen mittauksen edellytyksen: mittauksen aikana ei saa syntyä rakoja. Oppilaat korjasivat toistensa virhekäsityksiä ja ymmärsivät rakojen määrän kasvaessa myös tuloksesta tulevan virheellisen. Koska oppilaat ymmärsivät syyn, miksi rakoja ei saa syntyä, näen proseduraalisen tiedon lisäksi myös konseptuaalinen tiedon kehittyneen. Lisäksi oppilaat hyödynsivät tehtävässä ymmärrystä mittayksikön toistettavuudesta käyttäessään mittavälinettä tilanteessa, jossa mitattava pituus oli pidempi kuin mittaväline.

Havaitsin oppilaiden mittayksiköiden käytön kehittyvän opetusjakson aikana. Aluksi oppilaat puhuivat kaikista pituuksista metreinä, millimetreinä tai muina tunteminaan standardeina mittayksiköinä tarkoittaessaan todellisuudessa jalkoja, vaakoja tai omaa pituuttaan. Oppilas *T* kertoi mitanneensa sängyn pituuden ja leveyden ja saaneensa mittaustulokseksi "*kaksi metriä pitkä ja tota leveys yks ja vähän yli. Mun metriä*". Tarkentavilla kysymyksillä selvisi oppilaan mitanneen pituuden omilla jaloillaan. Oppilaat yhdistivät mitattuihin pituuksiin erilaisia kuulemiaan standardiyksiköitä ja tulkitsin mittayksiköiden vääränlaisen käytön osoittavan, ettei oppilailla ollut vielä tässä vaiheessa konseptuaalista ymmärrystä mittayksiköiden merkityksestä. Oppilaiden kanssa opeteltiin jakson aikana ilmoittamaan vastauksessa aina kulloinkin käytetty mittayksikkö, oli kyseessä vaaksa, millimetri tai *kasimitta*. Näin oppilaiden vastauksista mittayksikön käytön hiljalleen yleistyvän, ja mittaustulokseksi saatiin muun muassa "*vähän yli kokonainen äiti*", "*7 ja puoli peukalon ja etusormen väliä*", "*4 koko kättä*" ja myöhemmin standardiyksiköiden myötä vastaukset annettiin

metreinä, senttimetreinä, millimetreinä, grammoina tai kilogrammoina. Oppilaiden vastauksista huomasin osan oppilaista ymmärtäneen lisäksi identtisten yksiköiden merkityksen, sillä vastauksia ilmoitettiin myös kahden eri yksikön yhdistelminä: "2 jalkaa ja 3 vaaksaa", " $2\text{ m} + 1\text{ vaaksa}$ " ja "2 metriä ja noin 5 senttimetriä".

Pituuksien mittaaminen erilaisia mittavälineitä käyttämällä ohjasi oppilaita huomaamaan, että mitattua pituutta voitiin vertailla tulokseksikaasti vain yhtenäisiä mittoja käyttämällä. Oppilaat hahmottivat siirtymisen kehon mitoista *kasimitan* kautta metrin mittoihin ja perustelivat metrin tarvetta esimerkiksi sillä, "*että ei jonkun toisen koulun oppilas ymmärrä mitä tarkoittaa kolme kasimittaa leveä pulpetti, koska ne ei oo koskaan nähneet kasimittaa*". Mitoista syntyneiden keskusteluiden avulla havaitsin oppilaiden ymmärtäneen siirtymisen metrin mittoihin sekä kokevan siirtymisen järkeväksi. Tämä havainto on yhteneväinen tutkimusten kanssa [40, 117], joissa on todettu mittaamisen opettamisen epästandardeista mitoista kohti standardimittoja olevan oppilaiden oppimisen ja ymmärtämisen kannalta tärkeää.

Havaitsin oppilaiden ymmärtävän mittaamisen verrannollisuuden konseptuaalisen luonteen heidän huomatessa mitatun pituuden pysyvän samana, vaikka eri mittavälineitä käyttämällä tulos ilmaistaan eri tavalla. Esimerkiksi oppilas *D* totesi minun saavan luokan pituuden mittaamisesta eri mittaluvun kuin hän itse, jos mittavälineenä käytetään molempien pituuksia, mutta luokan pituuden pysyvän silti samana. Muut oppilaat halusivat vielä konkreettisesti tarkistaa, kumpi oli pidempi, minä vai oppilas *D*. Tämän jälkeen muutkin oppilaat hyväksyivät oppilaan pituuden sisältyvän luokan pituuteen useamman kerran kuin minun, vaikka luokan pituus pysyi vakiona. Verrannollisuuden ymmärtäminen kävi ilmi myös tehtävästä, jossa oppilaat arvioivat mitä äiti tai isä saisi vastaukseksi samasta mittauksesta minkä he itse olivat suorittaneet. Oppilaat perustelivat äidin tai isän saamaa pienempää mittalukua seuraavasti "*koska sillä on isommat jalat, koska hän on iso, koska hän on isompi, koska heidän jalat ovat pidempiä*" ja yhtä lukuun ottamatta kaikki oppilaat osasivat selittää mittayksikön ja mittaluvun välisen yhteyden oikein: mitä pienempi mittayksikkö, sitä suurempi mittaluku. Oppilas *M*, joka arvioi mittaluvun olevan äidillä tai isällä suurempi, koska he ovat isompia, korjasi itse vastaustaan lisäkysymysten ja tarkennusten avulla. Sama oppilas vastasi kuitenkin viikkoa myöhemmin osaamista mittaavassa harjoituksessa vastaavanlaiseen kysymykseen väärin, mutta osasi jälleen korjata itse itseään pyytäessäni lisäperusteluista vastaukselle.

Oppilailla on usein vaikeuksia ymmärtää mittayksikkömuunnoksia, minkä vuoksi muunnoksia opetellaan ulkoa, eikä esimerkiksi oivalleta pituuden ja massan yksiköiden yhteyttä kymmenjärjestelmään. Mittayksiköihin tutustumiseen ja niiden suuruusluokkien hahmottamiseen hyödynnettiin Ikäheimon [97] tukipistemenetelmää. Oppilaiden huomattiin hahmottavan tukipistemenetelmän avulla konkreettisesti millimetrin, senttimetrin, desimetrin ja metrin suuruudet oman kehon kautta ja oppilaiden havaittiin näyttävän toisilleen tukipisteiden avulla, mitä tarkoittaa millimetri tai senttimetri miettiessään yksiköiden kokoluokkia. Mittayksiköiden kokoluokan hahmottamisen lisäksi halusin tehdä oppilaille ymmärrettäväksi sen, miksi erilaisia mittayksiköitä käytetään ja oppilas *B* huomautus "*koulumatkaa olis vähän hankala mitata millimetreillä*" on esimerkki oppilaiden ajatuksista erilaisten yksiköiden tarpeesta. Yksikkömuunnoksista harjoiteltiin metrien muuttamista senttimetreiksi ja

päinvastoin sen jälkeen, kun oppilaat olivat toiminnan kautta etsineet cm ja m välisen yhteyden.

Esimerkiksi Hiebert [40] huomasi mittaamista koskevissa tutkimuksissaan oppilailla olevan haasteita mittavälineiden, etenkin viivoittimen, käyttämisessä ja tulkitsemisessa. Tässä tutkimuksessa havaitsin oppilaiden olevan varsin taitavia mittaamaan pituuksia niin epästandardeilla kuin standardeilla mittayksiköillä. Osaamista arvioivassa harjoituksessa oppilaat piirsivät viivoittimella 1 mm, 1 cm ja 1 dm pituiset viivat. Oppilaista 19 ($n = 24$) oli piirtänyt hyvin tarkasti senttimetrin mittaisen viivan ja hyväksyin vastauksissa (6 kpl) millin epätarkkuuden suuntaan tai toiseen, sillä kaikkien 2-luokkalaisten hienomotoriikka ei ollut tarvittavalla tasolla näin tarkkojen mittausten suorittamiseen. Loput viisi oppilasta olivat kaikki piirtäneet 5 mm pitkän viivan. Tämän tulkitsin johtuneen karkeasta huolimattomuudesta, kyvyttömyydestä tulkita viivoitinta oikein tai siitä, ettei oppilas ollut ymmärtänyt, mitä 1 cm tarkoittaa. Viivoittimen oikeanlainen käyttö vaatii proseduraalisen osaamisen lisäksi konseptuaalista ymmärrystä siitä, mitä on tekemässä ja mitä saatu mittaustulos tarkoittaa.

Huomattavasti enemmän hienomotoriikkaa vaativan millimetrin viivan oli kyennyt piirtämään 15 oppilasta. Kuusi oppilasta oli piirtänyt pituudeltaan 5 mm pitkän viivan, yksi oppilas oli piirtänyt 10 cm pituisen viivan ja kaksi oli jättänyt kohdan tyhjäksi. Väärien vastausten myötä havaitsin millimetrin vaikeammaksi mittayksiköksi ymmärtää, kuin senttimetri. Mittayksiköistä desimetriä olin käsitellyt vain mittaloron ja tukipisteen muodossa ja desimetrin mittaisen viivan piirtäminen olin tarkoittanut eriyttäväksi tehtäväksi nopeimmille. Oikean mittaisen viivan piirsi tästä huolimatta 15 oppilasta. Muiden vastaukset olivat selvästi virheellisiä tai tehtävään ei oltu vastattu lainkaan. Vastauksista voidaan kootusti todeta oppilaiden ymmärtäneen mittayksiköiden suuruuserot sekä oppineen tavoitteena olleen senttimetrin käsitteen hyvin.

Vastaavasti tehtävään, jossa pyydettiin mittaamaan lukumääräpaloista nelospalan (10 cm) pituus, sai 16 oppilasta oikean mittaustuloksen. Seitsemän oppilasta sai mittaustulokseksi 9 cm, minkä voin tulkita johtuvan karkeasta huolimattomuudesta viivoittimen käytössä. Yksi oppilas antoi vastaukseksi 4 cm, mikä on selvästi virheellinen tulos. Vastauksen lisäksi oppilas oli piirtänyt neljän ruudun mittaisen kuvan nelospalasta sekä täsmentänyt yhden neliön tarkoittavan yhtä senttimetriä. Oppilaat kokivat tehtävän vaikeaksi, sillä lukumääräpala oli monen mielestä hankala mitattava palan läpinäkyvyyden vuoksi. Oppilaat suoriutuivat tehtävästä silti keskimääräisesti hyvin.

Toiminnallisuus ja ongelmaperustaisuus

Seuraavaksi kuvaan toiminnallisessa ja ongelmaperustaisessa oppimisessa tarvittavien taitojen näkymistä oppilaiden toiminnassa. Tehtävät tähtäsivät oppilaiden yhteistyötaitojen, kriittisen ajattelun, tiedon soveltamisen, kokonaisuuksien hahmottamisen ja toimimisen aktiivisena oppijana kehittämiseen sekä kykyyn ottaa vastuuta omasta työskentelystään.

Oppilaiden yhteistyötaitojen vahvistamiseen pyrittiin pareittain ja ryhmissä to-

teutettavilla tehtävillä, jollaisia lähes kaikki kehitetyn materiaalin tehtävät olivat. Havaitsin oppilaiden sopivan yhdessä parin tai ryhmän kanssa, kuinka lähteä ratkaisemaan annettuja tuntitehtäviä. Oppilaat suorittivat mittaamistehtävät siten, että jokainen sai vuorollaan toimia mittaajana ja kirjurina. Suurin osa pareista ja ryhmistä toimi yhteisymmärryksessä ja ohjeita noudattaen. Joidenkin parien kohdalla havaitsin kuitenkin ristiriitatilanteita, joissa toinen parista ei esimerkiksi malttanut noudattaa ohjeistuksia, vaan ryhtyi ratkaisemaan tehtävää oman päänsä mukaan. Tällöin toinen parista joko mukautui kiireisemmän rytmiin ja tehtävä suoritettiin yhdessä ilman ohjeistuksen lukemista tai vaihtoehtoisesti pari piti kiinni ohjeiden lukemisesta ja sai myös toisen noudattamaan ohjeistusta. Toiminnallisuus ja ongelma-perustaisuus ohjasivat oppilaita aktiiviseen tiedon etsimiseen ja omien kokemusten hankkimiseen. Oppilaat ottivat vastuuta omasta ja parin tekemisestä ja tekivät annetut tehtävät aktiivisesti ja itsenäisesti kokeilemalla ja testaamalla.

Oppitunneilla opitun tiedon soveltamista vaadittiin konkreettisissa, mittaamisesta edellyttävissä kotitehtävissä. Arvioin tiedon soveltamista myös tunnilla tehtyjen tehtävien aikana. Tiedon soveltamisen merkitys korostui erityisesti tehtävässä (T7A, liite B), jossa oppilaat tutustuivat kilogramman ja gramman väliseen suhdelukuun pakastepussin ja riisin avulla. Pussin massaksi tuli saada mahdollisimman tarkkaan 100 grammaa, joten oppilaat joutuivat ensin selvittämään käyttämänsä vaa'an toimintatavan. Oppilaiden toiminnan seuraaminen osoitti, ettei heillä ollut ennestään kokemusta tai mielikuvaa 100 gramman suuruusluokasta, ja ongelmanratkaisuprosessin havainnoiminen osoitti erityisesti yritystä ja erehdys-toimintatavan tuottavan tuloksia. Suurin osa oppilaista täytti pakastepussia vähän kerrallaan käyden tasaisin väliajoin punnitsemassa pussin massan, toiset täyttivät pussin ensin täyteen ja ottivat riisiä vähin erin pois huomattessaan massan olevan aivan liian suuri. Muutama oppilas keksi pitää pakastepussin vaa'an päällä lisätessään sinne riisiä. Punnittuaan riisipussit oppilaat veivät pussinsa yksi kerrallaan isoon mekaaniseen puntariin ja lukivat jokaisen lisäyksen jälkeen riisipussien yhteismassan ääneen, kunnes saavutettiin yhden kilogramman massa.

Oppilaan oman aktiivisen työskentelyn ja tehtävien ongelma-perustaisen luonteen myötä oppilaiden kriittinen ajattelu tuli esiin opetusjakson aikana. Esimerkiksi pohdittaessa vanhojen suomalaisten pituusmittojen merkitystä, huomasi oppilas *D* sylinmitan olevan varsin epätarkka mitta. Hän kyseenalaisti toisen oppilaan selityksen sylinmitan suuruudesta ja huomautti, ettei asia voi olla täsmälleen oppilaan esittämällä tavalla, *"koska kaikkien kädethän ovat eri mittaisia"*. Oppilaan ääneen toteaman havainnon seurauksena myös muut havaitsivat jokaisen sylin olevan eri mittainen, jolloin sama mittayksikkö sai mittaajasta riippuen eri pituuden. Kriittinen ajattelu nousi esiin myös pohdittaessa kertomuksen (s. 42) avulla sitä, kuinka massaa voidaan punnita. Oppilaat kyseenalaistivat hyvin nopeasti kertomuksessa esitetyt tavat selvittää koulureppujen keskinäistä painoeroa ja perustelivat mielipiteitään: *"koska se oli niinku vähän väsyny ekalla testillä eikä jaksanu nostaa sitä omaa"*, *"ne olis pitäny testata samaan aikaan"* ja *"jos on oikeakätinen niin käyttää enemmän oikeaa kättä"*.

Oppilaiden arviointitaitojen, tiedon soveltamisen ja kokonaisuuksien hahmottamisen kehittämiseen pyrittiin tasapainovaakoja hyödyntävällä tehtävällä (T6, liite

B), joissa oppilaat selvittivät viiden erilaisen esineen massojen suuruusjärjestystä. Tehtävä aloitettiin arvioimalla käsimääräisesti esineiden keskinäisiä massoja, jonka jälkeen arviot tarkistettiin tasapainovaa'alla. Tehtävän ratkaisuun ei annettu ohjeistuksia tai vinkkejä ja oppilaat saivat yhdessä keksiä ratkaisut tehtävien toteuttamiselle. Oppilas *O* kuvasi muille oppilaille vaa'an toimivan niin, että *"laitetaan jotain sinne toiseen ja toiseen ja se kummalle puolelle se kallistuu niin sitten se on painavampi"*. Oppilaat keksivät nopeasti etsiä kevyimmän tai painavimman esineen, johon lähtivät vertaamaan muita esineitä tarkistaakseen arvionsa.

Havaintojen perusteella oppilaat kokivat mittaamisen oppitunnit kiinnostaviksi ja motivoiviksi. Oppilaat osallistuivat keskusteluihin ja kertoivat paljon omia ajatuksiaan ja kokemuksiaan mittaamisesta. Usein keskustelu laajeni paljon laajemmalle aihealueelle oppilaista itsestä käsin ja tuntien aikana tuli käsiteltyä veden kiehumista ja ilmanpainetta osana entisaikaan käytettyä teekuppimittaa. Oppilas *N* tiesi kertoa kilometriin sisältyvän 1000 metriä ja ilmoitti lisäksi tämän olevan senttimetreinä 100 000 cm. Massan yhteydessä puolestaan pohdittiin painovoimaa ja ilmakehää sekä mietittiin mitä Kuussa tapahtuu erimassaisille esineille. Oppilaiden osoittaman kiinnostuksen vuoksi massan oppitunnilla katsottiin video Kuussa kuvatusta höyhen ja vasara -kokeesta. Massan yhteydessä pohdittiin myös veden vaikutusta painon tuntemukseen. Oppilaat olivat selvästi kiinnostuneita käsiteltävistä aiheista ja kysyivät monia kysymyksiä aiheisiin liittyen. Oppilaiden työskentelyn havaittiin olevan oma-toimista ja ryhmä- sekä parityöskentely sujui kaikilla ryhmillä hyvin. Havaintojen perusteella oppilaiden keskinäiset keskustelut koskettivat pääsääntöisesti tunnin aiheita. Oppilaiden toiminnallinen työskentely oli tavoitteellista ja asetetut ongelmat kiinnostivat oppilaita.

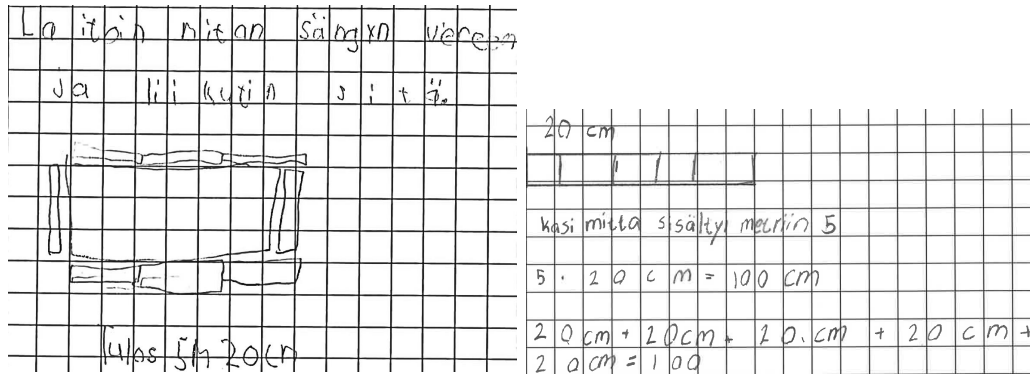
Matemaattisen ajattelun esiintuominen

Halusin mahdollistaa oppimateriaalilla oppilaan oman matemaattisen ajattelun esiintuomisen. Sain selville oppilaiden käsityksiä pituudesta ja massasta heidän kielen-täessään ajatteluaan (ks. kappale 4.4). Keskustelun huonona puolena ilmeni kuitenkin se, etteivät jotkut oppilaat osallistuneet yhteiseen keskusteluun koskaan tai osallistuivat vain harvoin. Näiden oppilaiden matemaattista ajattelua ei täten saatu suullisesti näkyviin. Pääasiassa oppilaat osallistuivat keskusteluun hyvin ja olivat tottuneita ilmaisemaan omaa matemaattista ajatteluaan. Keskustelut liittyivät vahvasti käsillä oleviin aiheisiin ja motivoivat oppilaita tehtävien ratkaisemiseen.

Keskusteluissa oppilaat toivat laajasti esiin omia ajatuksiaan mittaamisesta. Monet antoivat konkreettisia esimerkkejä siitä, millä ja mitä mitataan, kuten viivoittimella kynän pituus tai auton matkamittarilla koulumatkan pituus. Oppilaiden vastauksista kävi ilmi mittaamisen vahva yhteys arkipäivän ja omaan elämään liittyviin asioihin. Oppilaat myös kertoivat mielellään, kuinka olivat suorittaneet pituuden mittauksia. Keskusteluissa nousivat esiin myös tarkan mittaamisen kriteerit ja oppilaat kiinnittivät omissa kertomuksissaan huomiota päällekkäisyyksien ja rakojen välttämiseen, kuten oppilas *W* kertoessaan suorittaneensa mittauksen niin, että *"äiti piti merkkisormea ja minä mittasin kasimitalla"*.

Piirtäminen osana matematiikan kielentämistä tuo esiin oppilaan matemaattista

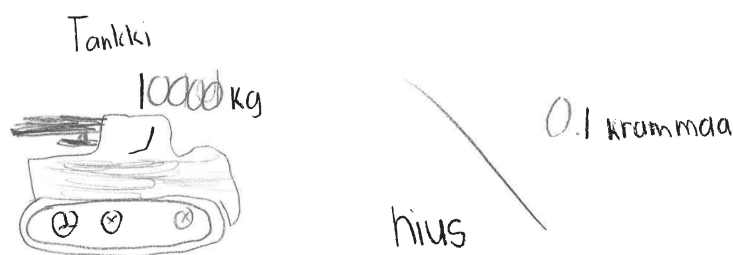
ajattelua ja sain oppilaiden koti- ja tuntitehtävien sisältämien piirustusten avulla lisätietoa oppilaiden käsityksistä pituuden ja massan mittaamisesta. Kuvassa 7.2 on



Kuva 7.2: Oppilaiden A ja S sanalliset ja kuvalliset selitykset suorittamistaan mittauksista.

tyypillisiä piirustuksia kotona ja tunnilla suoritetuista mittauksista. Oppilaat osasivat suullisesti ja sanallisesti selittää ja perustella käyttämiään mittaproseduureja, mutta kuvista nähdään, ettei oppilaille ole syntynyt visuaalista ymmärrystä (ks. kappale 4.2) mittayksiköiden identtisuudesta tai rakojen ja päällekkäisyyksien välttämiseksi. Havainto on yhteneväinen Battistan tutkimuksesta [10] saatujen tulosten kanssa. Sivun 47 kuvassa 6.10 nähdään esimerkki oppilaan vastauksesta, jossa sanallista selitystä tukee oikean mittaproseduurin sisältävä kuvallinen selitys. Enemmistö oppilaiden piirtämistä pituuden mittaamisen kuvista oli kuitenkin sellaisia, joissa vain sanallinen selitys ilmaisi mitan käsitteen ja mittaproseduurien ymmärrystä kuvan ollessa piirretty vähän sinnepäin.

Selvitin oppilaiden käsityksiä massasta ennen käsitteen opettamista kotitehtävällä (kt: 5, liite B), jossa oppilaat piirsivät yhden painavan ja yhden kevyen esineen, sekä arvioivat, kuinka paljon esineet painavat (kuva 7.3). Viisi oppilasta ($n = 20$) oli



Kuva 7.3: Oppilas B:n mielikuva siitä, mikä on painava ja mikä kevyt.

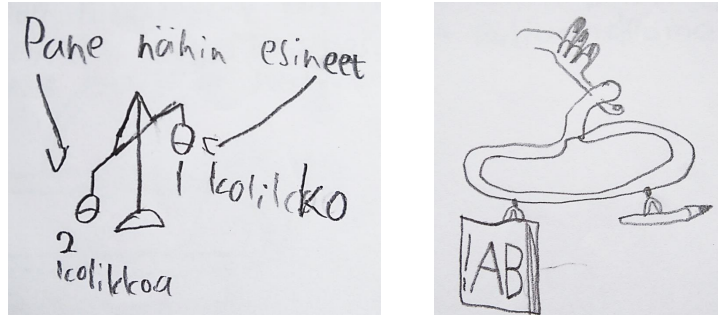
maininnut esimerkkinä kevyestä esineestä kynän (3-200 g) ja neljä oppilasta sulan tai höyhenen (0,1-5 g). Muiden vastaukset vaihtelivat hiuksesta (0,1 g) pleikkariohjaimeen (300 g), yhteistä vastauksilla oli selkeä yhteys arkielämään. Arviot kevyiden esineiden massaista olivat kohtuullisen realistisia ja havaitsin kaikkien kevyiksi miellettyjen asioiden ja esineiden olleen kooltaan pieniä.

Painaviksi kuvattujen asioiden suuruusluokassa oli huomattavasti suurempaa hajontaa vasarasta (500 g) elefantiin (595 kg) ja panssarivaunuun (10 000 kg). Massarviot eivät juuri osuneet kohdilleen ja oppilailla näytti olevan vaihtelevia mielikuvia siitä, minkä he mielsivät painavaksi. Painokäsitteen (massan) sekä massan yksiköiden havaitsin olevan oppilaille vieraampia, kuin pituuden yksiköiden. Myöskään massan mittaamiseen tarkoitetut mittavälineet, tasapainovaaka ja erilaiset keittiövaa'at, eivät olleen suurimmalle osalle oppilaista ennestään tuttuja, ja huomasin oppilaiden käyttävän sujuvammin digitaalisia kuin perinteisiä vaakoja. Perinteisissä vaa'oissa olevat mitta-asteikot olivat oppilaille vaikeita tulkita, minkä näen selityksenä sille, miksi oppilaat valitsivat mieluummin digitaalisen vaa'an tehdessään punnitustehtäviä.

Oppilaiden piirtämällä ja kirjoittamalla kuvatut selitykset tasapainovaa'an toimintaperiaatteesta havainnollistivat minulle heidän käsityksiään vaa'an käyttötarkoituksesta. Jaoin vastaukset sisällön perusteella viiteen eri luokkaan. Oppilas *L* kuvasi vaa'an toimivan niin, että kun *"toiselle (puolelle) laitetaan punnus niin se menee alas jos toiselle laitetaan yhtä paljon tavaraa niin lautaset ovat samalla korkeudella"*. Oppilaan vastauksesta käy ilmi hänen ymmärtäneen tasapainovaa'an periaatteen, ja toimintatavan eli sen, että tasapainovaaka näyttää punnittavien esineiden keskinäisen suhteen sekä kertoo, milloin massat ovat yhtä suuret. Kahdeksan muun oppilaan ($n = 20$) vastaus oli sisällöltään vastaavanlainen ja näen näiden oppilaiden ymmärtäneen proseduraalisen osaamisen lisäksi punnitsemisen konseptuaalisen tiedon.

Kaksi oppilasta kertoi tasapainovaa'an toimivan oppilas *D:n* kuvailemalla tavalla: *"se punnitsee kumpi on painavampi"*. Näiden oppilaiden vastauksista ei käy ilmi sitä, että punnittavien esineiden massat voivat olla myös yhtä suuret. Vastaajat ovat kuitenkin ymmärtäneet vaa'an periaatteen eli hallitsevat proseduurin. Neljä oppilasta vastasi tasapainovaa'an toimivan *"laittamalla molemmille puolille jonkin esineen"*. Vastauksista ei ilmene, onko oppilas ymmärtänyt, mitä tasapainovaa'an avulla saadaan selville. Kolme oppilasta kuvaili tasapainovaa'an avulla selviävän, kuinka paljon esineet painavat. Tämä on selvästi virheellinen käsitys, sillä vastausten yhteydessä olevissa piirustuksissa kuvataan kahden massaltaan tuntemattoman esineen suhdetta toisiinsa, eikä kuvauksissa ole esimerkiksi mainittu tai piirretty tietyn massaisia punnuksia. Kahden oppilaan vastauksissa ei oltu vastattu kysytyyn kysymykseen. Oppilaiden piirtämissä kuvissa (kuva 7.4) tasapainovaaka oli piirretty tasapainoasemaan 16 vastauksessa ja pois tasapainosta kahdessa vastauksessa. Hieman yli puolet oppilaista (11 kpl) oli piirtänyt tasapainovaa'aksi henkarin oppitunneilla käytettyjen henkarivaakojen innoittamina ja seitsemän oppilasta oli puolestaan piirtänyt klassista tasapainovaaakaa muistuttavan vaa'an.

Oppilaiden piirtämien kuvien lisäksi mittaproseduurien ja konseptuaalisen ymmärtämisen tasosta saatiin tietoa opetuskokonaisuuksien jälkeen tehdyissä oppimista mittaavissa tehtävissä. Näissä tehtävissä oppilaat kertoivat kirjallisesti, mitä pituuden mittaamisella heidän mielestään tarkoitetaan ja miksi mittaamisessa käytetään erilaisia mittavälineitä. Kirjallinen ajattelun kielentäminen tuotti osalle oppilaista suuria vaikeuksia, mikä ei ollut yllättävää ottaen huomioon 2-luokkalaisen kirjallisen tuottamisen tason. Jaoin vastaukset kahteen osioon: vastauksiin, joiden pohjalta en voinut tehdä johtopäätöksiä oppilaan ajattelusta vastauksen ollessa olematon tai



Kuva 7.4: Esimerkki oppilaiden piirtämistä tasapainovaa'oista: klassinen tasapainovaaja ja henkarivaaka.

erittäin epäselvä ja vastauksiin, joiden sisältöä pystyin tulkitsemaan.

Sisällöltään analysoitavissa olevat vastaukset jaoin edelleen kahteen osaan: laajempiin ja suppeampiin kuvauksiin siitä, mitä mittaaminen on. Oppilas A:n mielestä "mittaamisella tarkoitetaan sitä, että selvitetään kuinka pitkä, leveä tai korkea jokin asia on" ja oppilas S:n mielestä "se tarkoittaa että voi käyttää erilaisia esineitä ja katsoa montako kertaa se sisältyy johonkin esineeseen". Tulkitsin näiden oppilaiden ymmärtäneen mitan käsitteen ja sen merkityksen sekä osaavan lisäksi ilmaista selkeästi käsityksensä mittaamisesta. Oppilas A:n vastauksesta näkyy myös pituuskäsitteen monimerkityksellisyys, sillä pituudella voidaan tarkoittaa oppilaan mainitsemien leveyden ja korkeuden lisäksi myös etäisyyttä, ja pituus voidaan liittää myös aikaan kuvatta esimerkiksi tunnin olevan 45 minuuttia pitkä. "Sitä että asioita mitataan" ja "mitta asetetaan mitattavaa juttua vasten" tyyppiset vastaukset osoittavat mielestäni oppilaan ymmärtäneen mittaamisen idean, mutta ovat sisällöltään muuten suppeampia kuin edellisten esimerkkien vastaukset. Erilaisen näkökulman mittaamisen pohtimiseen toivat vastaukset, joissa todettiin mittaamisen olevan myös laskemista. Kuten oppilas N kirjoitti, mittaaminen on myös "sitä että jonkun jutskan pituus lasketaan".

Oppilas G:n mukaan erilaisia mittavälineitä käytetään, "koska eri välineillä voi mitata eri matkoja". Tämä oli tyypillinen perustelu kysymykseen, miksi mittaamisessa käytetään erilaisia mittavälineitä. Tulkitsin oppilas G:n kanssa samansuuntaisesti vastanneiden oppilaiden ymmärtäneen proseduurien kannalta ilmeisen tarpeen erilaisille mittavälineille. Oppilas T perusteli mittavälineiden käyttöä "siksi koska ne on tarkkoja" johon yhtyi myös oppilas V perustelemalla mittavälineiden käyttöä sillä "että mittaaminen olisi tarkkaa". Näiden vastausten tulkitsin viittaavan epästandardien ja standardien mittojen väliseen eroon.

Vastauksista, joissa on todettu mittavälineitä käytettävän, "siksi koska voitaisiin mitata" tai siksi "että tiedetään mitä siitä tulee", ei mielestäni käy selkeästi ilmi ovatko oppilaat ymmärtäneet miksi on olemassa nimenomaan erilaisia mittavälineitä. Sen sijaan vastauksista huomataan oppilaiden ymmärtäneen ylipäätään mittavälineen käyttötarkoituksen. Selvästi virheellinen käsitys mittavälineiden tarpeellisuudesta on oppilas M:llä, jonka mielestä erilaisia mittavälineitä käytetään, "ettei saataisi aina sama tulos". Vastauksen perusteella oppilas ei ymmärrä esimerkiksi

viivoittimen ja metrin mitan sisältävän samoja mittayksiköitä, senttimetrejä ja millimetrejä, vaan ajattelee mittavälinettä vaihtamalla myös mittaustuloksen muuttuvan, jolloin oppilaalle ei ole syntynyt konseptuaalista ymmärrystä mittaamisen luonteesta. Oppilaiden, jotka jättivät vastaamatta kysymykseen tai vastasivat etteivät tiedä, tulkitsin kokevan mitan käsitteiden ymmärtämisen vaikeana.

Oppilaiden kirjallisten vastausten tulkinnan syventämiseksi olisi minun tullut pyytää oppilaita suullisesti tarkentamaan, mitä he ovat vastauksillaan tarkoittaneet. Oman ajattelun kirjallinen tuottaminen on 2-luokkalaiselle vielä vaikeaa ja oppilaan ajatusten kulun ja syy-seuraussuhteiden ymmärtäminen oli minulle tutkijaopettajana haastavaa. Syvempi oppilaantuntemus ohjaisi tarkempien tulkintojen ja havaintojen tekemiseen sekä arvioimaan oppilaan tuottamaa tietoa laajemmin.

Oppilaiden itsearvioinnin ja mielipidekyselyn analyysi

Oppilaiden kotona tekemässä mielipidekyselyssä kaikki vastanneet ($n = 18$) olivat kertoneet omasta mielestään kivoimman asian pituuden ja massan oppitunneilta. Oppilaiden vastauksissa korostuivat toiminnalliset tehtävät, joissa oli itse päässyt mittaamaan ja punnitsemaan erilaisia esineitä. Sisällytin aineiston analysoinnissa toiminnalliseen ja konkreettiseen tekemiseen myös sellaiset vastaukset, joissa mainittiin monisteet tai läksyt, sillä kaikki oppilaille jaetut tuntimonisteet ja kotitehtävät olivat toiminnallisia tehtäviä. Osa oppilaista eritteli myös tarkemmin, mistä oli erityisesti pitänyt, kuten oman sängyn mittaamisesta, riisipussien punnitsemisesta tai painon katsomisesta maitopurkeista.

Tylsimmäksi tunneilla olleeksi tehtäväksi suurin osa oppilaista (83%) vastasi ettei tiedä tai ettei mikään ollut tylsää. Neljä näistä oli vastannut kysymykseen vetämällä vastauskohtaan viivan, minkä tulkitsin niin ikään tarkoittavan, ettei mitään tylsää ollut tullut oppilaan mieleen sillä hetkellä. Kolme oppilasta mainitsi mielestään tylsimät asiat, jotka olivat punnitseminen, mittaaminen metrin mitalla ja eri työskentelypisteet. Koska kaikki olivat vastauksissaan maininneet kivoimman tai kivoimpia tunneilla tehtyjä asioita, eikä tylsiä tehtäviä maininnut kuin kolme oppilasta, tulkitsin oppilaiden pitäneen mittaamisen oppitunneista. Tämä vahvistaa oppituntien ja videoiden havainnoimisesta saatuja positiivisia tuloksia toiminnallisesta ja ongelmaperustaisesta oppimisesta mittaamisen opettamisessa.

Opetusjakson päätteeksi toteutetun itsearvioinnin perusteella oppilaat kokivat oppineensa hyvin, mitä pituuden mittaamisella tarkoitetaan. Vastanneista oppilasta 12 (67%) oli omasta mielestään oppinut hyvin tai erittäin hyvin mitä mittaaminen on. Neljä oppilasta (22%) ei kuitenkaan tiennyt oliko oppinut hyvin vai huonosti ja oli arvioinut osaamisensa olevan keskinkertaista. Yhtä lukuun ottamatta kaikki oppilaat vastasivat oppineensa hyvin tai erittäin hyvin millä tavoin pituutta voidaan mitata. Kaikki oppilaat kokivat oppineensa mitä painon mittaamisella tarkoitetaan ja kahta lukuun ottamatta sen millä tavoin painoa voidaan mitata. Oppilaiden kokemusten nojalla oppimateriaali soveltui pituuden ja massan opettamiseen hyvin.

Mielipide- ja itsearviointikysely palautettiin omalla nimellä varustettuna, mikä on saattanut vaikuttaa oppilaiden antamiin vastauksiin. Kyselyä ei kuitenkaan haluttu tehdä nimettömänä, sillä tulosten haluttiin olevan yhdistettävissä oppilaiden

tuntityöskentelyyn. Itsearvioinnilla pyritään itsetuntemuksen ja opiskelutaitojen parantamiseen sekä positiivisen minäkäsityksen ja hyvän itsetunnon syntymiseen [95]. Oman osaamisen arviointi auttaa oppilasta oman toiminnan kontrolloimisessa [1, 48]. Ahon [1] mukaan alkuopetusikäiset oppilaat kykenevät kehityspsykologisesta näkökulmasta katsottuna itsearviointii ja reflektointiin. Tätä huomiota tukevat myös muut aiheesta tehdyt tutkimukset (mm. [45, 61]), joten oppilaiden itsearvioinnista saatuja tuloksia voidaan pitää luotettavina.

Tutkimusluokan luokanopettajan haastattelu

Toteutin tutkimusluokan oman luokanopettajan haastattelun henkilökohtaisena haastatteluna. Haastattelulla halusin selvittää luokanopettajan näkemyksen kehitetystä oppimateriaalista ja toiminnallisten sekä ongelmaperustaisten tehtävien tarpeesta mittaamisen opettamisessa. Lisäksi halusin selvittää, miten luokanopettajan mielestä oppilaat suhtautuivat oppimateriaaliin.

Luokanopettaja näki nykyisten oppikirjojen tehtävien olevan pääsääntöisesti puhtaasti yksikkömuunnosharjoituksia, joissa oppilaat mekaanisesti muuntavat yksiköitä toiseen ymmärtämättä välttämättä yhtään, mitä yksiköillä tehdään tai missä suuruusluokassa liikutaan. Opettajan tekemät havainnot oppikirjojen tehtävätyypeistä saavat tukea empiirisen oppikirja-analyysistä, jonka tuloksista havaitsin mittaamisen tehtävien olevan lähes kokonaan kynä ja paperi -tehtäviä. Luokanopettaja myös mietti, ettei mittaamista voi oppia vain tekemällä oppikirjojen tehtäviä vaan mittaamisen ymmärtämiseksi tarvitaan myös omakohtaisia kokemuksia. Juuri omakohtaisten kokemusten on tutkimuksissa [97] havaittu olevan edellytys mittaamisen oppimiselle ja kehitetyllä oppimateriaalilla pyrittiin omien kokemusten synnyttämiseen. Omakohtaisten kokemusten tärkeys ilmeni opettajan mielestä erityisesti oppilaiden mitatessa yhdellä jakson matematiikan tunnilla toistensa pituutta: oppilailla ei näyttänyt olevan hajuakaan, kuinka mittaaminen olisi järkevintä suorittaa, vaikka pituuden mittaamisesta oli harjoiteltu viivoittimella.

Opettaja kertoi olleensa ennen opetusjakson alkua hieman huolissaan siitä, olisivatko oppimateriaalin tehtävät liian yksinkertaisia ja helppoja 2. luokan matematiikkaan. Mittaamistuntien seuraamisen hän kuvaili kuitenkin olleen silmiä avaava tilanne, sillä hän huomasi ajatelleensa oppilaiden ymmärryksen mittaamisesta paljon pidemmälle, kuin tehtäviä tehdessä ja keskusteluista kävi jakson aikana ilmi. Toiminnalliset ja ongelmaperustaiset tehtävät loivat opettajan mukaan riittävästi haastetta jokaiselle oppilaalle ja oppilaat tekivät tosissaan ja keskittyneesti töitä oppitunneilla. Myös Järvisen [56] toiminnallisen oppimisen tutkimuksessa havaittiin toiminnallisten tehtävien vaikuttavan positiivisesti oppilaiden keskittymiskykyyn.

Luokanopettaja koki oppilaiden suhtautuvan mittaamisen tehtäviin kiinnostuneesti sekä olevan motivoituneita osallistumaan opetukseen. Oppilaiden käymät keskustelut liittyivät pääsääntöisesti tunnin aiheeseen ja tehtävien tekemisessä oli aistittavissa, että niitä tehdään mielenkiinnosta ja tosissaan. Opettaja koki kehitetyt tehtävät erittäin hyviksi ja näki tuntien välille rakentuneen kehityskaaren olleen oppilaille ymmärrettävissä ja hahmotettavissa, mikä hänen näkökulmastaan lisäsi oppilaiden tekemisen mielekkyyttä. Erityisesti ongelmaperustaisuus ja konkreettinen tekemi-

nen sekä oppilaiden antoisat keskustelut viehättivät häntä. Koska tutkimusluokka oli ennestään tottunut keskustelemaan ja ilmaisemaan ajatteluaan, pohti opettaja suuressa roolissa olleen keskustelun toimimista luokissa, joissa ei ole vastaavanlaista keskustelukulttuuria.

Oppimateriaalin jatkokehittämiseen opetusjakson perusteella nousi opettajan mielestä pituuden ja massan väliin tarvittava hengähdystauko, josta olin havaintojen ja tuntikokemusten perusteella samaa mieltä. Toiminnallisten ja ongelmaperustaisten tuntien jälkeen koimme mitan käsitteen kokoamiseksi ja yksiköiden sekä lyhenteiden käyttämisen harjaannuttamiseksi tarpeelliseksi suunnitella materiaalia myös mekaanista laskutuntia varten. Mekaaninen työskentely tarjoaisi tauon ennen massakäsitteeseen ja uusiin yksiköihin siirtymistä, sillä toiminnallisuuden havaittiin vaativan oppilailta paljon omaa työskentelyä ja pohtimista, mikä selvästi kävi oppilaille rasakaaksi. Luokanopettajan kanssa pohdimme lisäksi jakson ajankäyttöä sekä uuden opetussuunnitelman tuomia ajankäyttömahdollisuuksia. Pituuden ja massan oppitunteihin käytetty aika tuntui opettajasta sopivalta, joskin enemmänkin tunteja olisi hänen mielestään voinut käyttää aiheen parissa. Lopuksi pohdimme materiaalin käyttömahdollisuuksista siirtää opetus ulkona toteutettavaksi pituuden, massan ja tilavuuden sisältäväksi opetuskokonaisuudeksi.

7.4 Materiaalin kehittämisvaihe III

Kehittämisvaiheessa III tarkensin ja täsmensin kehittämäni oppimateriaalia koko kehittämisprosessista saamani havaintojen perusteella sekä omien kehittämisvisioideni pohjalta. Selvensin kotitehtävän 2 tehtävänantoa vaihtamalla kysymysten järjestystä, täsmensin kotitehtävien 3 ja 4 tehtävänantoa lisäämällä tarkentavia sanoja, kuten "kerro" ja "pisimmästä kohtaa". Muutin kotitehtävän 5 tehtävänantoa täsmällisempään muotoon ja vaihdoin painokäsitteen tilalle massan. Lisäsin tuntitehtävien 2, 4, 7A ja 7B kysymysten perään viivat helpottamaan vastausten kirjoittamista. Lisäksi täsmensin kotitehtävän 7A tehtävänantoa ja vaihdoin painokäsitteen tilalle massan.

Lisäsin pituuskäsitteen ja mittaproseduurien osaamista arvioivaan yksilöharjoituksen uuden tehtävän tehtäväksi 2, sekä laitoin kysymyksien perään vastausviivat. Lisäsin yksilöharjoituksen viimeiseen tehtävään kaksi uutta mitta- ja piirrettävää, 5 mm ja 4 cm, jotta oppilaat ymmärtäisivät tarkan mittaamisen merkityksen pienilläkin etäisyyksillä. Vaihdoin massakäsitettä ja proseduureja mittaavaan harjoitukseen painotermien tilalle massan. Lisäksi lisäsin kysymysten perään vastausviivat. Lopullinen kehittämisuotos on pituuden ja massan opetukseen soveltuva oppimateriaali, joka on ladattavissa osoitteesta <https://drive.google.com/open?id=0BzWDtelpVN1vaDR5TDkwbDNTNm8> (luettu 8.11.2016).

8 Johtopäätökset ja pohdinta

Tässä luvussa teen yhteenvedon aineiston analyysistä saaduista tulkinnoista johtopäätösten ja pohdinnan muodossa sekä pohdin jatkotutkimusmahdollisuuksia. Lisäksi arvioin tutkimusprosessin luotettavuutta ja tutkimuksen eettisiä näkökulmia.

8.1 Johtopäätökset

Tämän kehittämistutkimuksen tavoitteena oli selvittää toiminnallista ja ongelmaperustaista oppimista hyödyntävän oppimateriaalin mahdollisuudet ja haasteet 2. luokan matematiikan opetuksessa. Kehittämistutkimuksella pyrittiin vastaamaan pituuden ja massan mittaamisen oppimisessa havaittuihin haasteisiin sekä selvittämään mittaamisen opettamisen nykytilanne. Keskeiset tutkimuskysymykset, joihin tutkimuksessa haettiin vastauksia, olivat 1) millainen on pituuden ja massan opetus 2. luokan matematiikan oppikirjojen näkökulmasta, 2) minkälainen toiminnallinen ja ongelmaperustainen oppimateriaali tukee pituuden ja massan oppimista sekä 3) miten tässä kehittämistutkimuksessa kehitetty oppimateriaali soveltuu pituuden ja massan opetukseen.

Millainen on pituuden ja massan opetus 2. luokan matematiikan oppikirjojen näkökulmasta

Nykyisten oppikirjojen sisältämät tehtävät ovat lähes kaikki mekaanisia kynä ja paperi -tehtäviä, minkä havaitsin myös tämän tutkielman pituuden ja massan mittaamisen tehtävien empiirisen oppikirja-analyysin tuloksena. Koska oppikirjojen ja opettajanoppaiden on havaittu (mm. [53, 101]) ohjaavan matematiikan oppitunteja etenemisnopeuden ja sisältöalueiden suhteen merkityksessään opetussuunnitelmaa enemmän, halusin oppikirja-analyysin havaintojen pohjalta luoda perinteisistä tehtävätyypeistä poikkeavan oppimateriaalin pituuden ja massan opettamiseen. Ikäheimon [46] mukaan uusia käsitteitä tulisi opettaa ilman oppikirjaa hyödyntämällä opetuksessa sopivia käsitteenmuodostusvälineitä, jolloin mittaamisen opettamisessa tulisi käyttää monipuolisesti mittaamiseen tarvittavia välineitä käsitteenmuodostuksen vahvistamiseksi. Myös Tikkanen [123] havaitsi väitöskirjassaan oppikirjasidonaisen opetuksen sijaan sisällöltään monipuolisen ja toiminnallisen matematiikan tuovan oppilaille enemmän mielekkyyttä matematiikan oppimiseen.

Oppikirja-analyysin perusteella (ks. kappale 6.1) havaitsin tehtävistä vain 7% olleen konkreettiseksi luokiteltavia tehtäviä, jotka olivat yhtä lukuun ottamatta perinteisiä "mittaa oppikirjan kuvan pituus" -tehtäviä. Muista poikkeava tehtävä oli toiminta-aukeamalle sijoitettu paperilennokkitehtävä, jossa oppilaan tuli mitata taittelemansa lennokin lentomatka. Jotta mittayksiköiden ja mittausvälineiden valinta, sekä yksikkömuunnokset olisivat mielekkäitä ja järkeviä, on mittaamisen periaatetta harjoiteltava omakohtaisten kokemusten avulla. Analysoitujen oppikirjojen tehtävät eivät kuitenkaan mahdollista mittaamisen harjoittelua edellä kuvattujen taitojen

harjoittamiseksi, eivätkä tehtävät olleet luonteeltaan toiminnallisia. Jo Deweyn [25] korostama havainto, että oppikirja tai opettaja ei saa olla oppimisen painopisteenä, vaan oppiminen tulee tapahtua lapsessa itsessään, otettiin kehitettävässä materiaalis-
sa huomioon.

Analysoitujen oppikirjojen tehtävät painottuivat pituuskäsitteen harjoitteluun (78% tehtävistä). Kaikissa oppikirjoissa pituuden yksiköistä käsiteltiin senttimetri ja metri, lisäksi kahdessa kirjassa käsiteltiin millimetri ja kilometri. Massan yksiköistä käsiteltiin vain gramma ja kilogramma. Kehitettävässä oppimateriaalissa mukailtiin kirjojen painotusta ja pituudelle varattiin enemmän aikaa kuin massalle.

Minkälainen toiminnallinen ja ongelmaperustainen oppimateriaali tukee pituuden ja massan oppimista

Teoreettisen ongelma-analyysin avulla sain vastauksen tutkimuskysymykseen, minkälainen toiminnallinen ja ongelmaperustainen oppimateriaali tukisi pituuden ja massan oppimista. Kansainvälisten tutkimustulosten perusteella mittaamisen oppiminen on havaittu haastavaksi matematiikan aihealueeksi [131, 71, 44] ja aikaisempien aihetta käsittelevien tutkimusten perusteella on saatu selville, minkälaisia haasteet ovat ja kuinka mittaamista tulisi opettaa. Koska oppilailla on näiden tutkimusten [40, 15, 66] perusteella ristiriitoja konseptuaalisen ja proseduraalisen tiedon välillä sekä vaikeuksia yhdistää oppitunneilla tehtyjä harjoituksia formaaleihin symboleihin ja täten ongelmia mm. viivoittimen käyttämisessä ja tulkitsemisessä, hain toiminnallisen ja ongelmaperustaisen oppimisen teorioista ja tutkimustuloksista vaihtoehtoa mittaamisen opettamiselle ja oppimiselle.

Toiminnallinen ja ongelmaperustainen oppiminen perustuvat konstruktivistiseen oppimiskäsitykseen, jossa oppilaan rooli oman tiedon konstruoijana on suuri [110]. Aktiivisella toimimisella ja toiminnallisilla työtapoilla voidaan mahdollistaa oppilaille mittaproseduurien oppiminen sekä pituuden ja massan konseptuaalisen tiedon kehittyminen oppilaista itsestään käsin, sillä toiminnallisuuden ja ongelmaperustaisuuden on todettu kehittävän mm. oppilaiden ajatusprosesseja ja ongelmanratkaisutaitoja [34, 112, 119]. Mitan käsitteiden ja mittaproseduurien välillä havaittujen ristiriitojen [40] ja lapsen tieteellisten käsitteiden muodostumisprosessin [130] huomioimiseksi hain oppimiseen mielekkyyttä huomioimalla oppilaan aktiivisen roolin oman tiedon rakentajana. Oppimisprosessissa huomio tulee kiinnittää mittayksiköiden iteratiivisen ja lineaarisen luonteen, transitiivisuuden, yksiköiden yhteenlaskun sekä mittayksikön ja mittaluvun käänteisen verrannollisuuden ymmärtämiseen [40, 15, 66]. Myös mittaproseduurien käyttötarkoitusten ymmärtäminen on tärkeä tekijä mitan käsitteiden oppimiselle. Kun mittaamista opiskellaan oivallusten ja ymmärtämisen kautta arkielämään liittyvien ongelmaperustaisten tehtävien avulla, voidaan saavuttaa edellä kuvatut, haasteellisiksi koetut mittaamisen oppimisen osa-alueet. Esimerkiksi Tikkanen [123] ohjaa väitöskirjassaan opetusta ymmärtämisen, keksimisen ja oivaltamisen kautta toiminnalliseen, ongelmanratkaisua sisältävään ja monipuoliseen oppimiseen.

Matematiikan opetukseen keskeisesti vaikuttavina tekijöinä pidetään oppilaiden myönteistä asennetta ja itsenäistä työskentelyä, sekä varsinkin alakoulussa toimin-

tamateriaalien käyttämistä osana opetusta [53]. Myönteisesti matematiikkaan asennoituvien oppilaiden on Kuparin [70] mukaan havaittu saavuttavan parempia oppimistuloksia kuin negatiivisesti tai neutraalisti suhtautuvien. Vastaavasti hyvin menestyvien oppilaiden on todettu asennoituvan myönteisesti matematiikan opiskeluun ja oppimiseen. Myös PISA ja TIMSS-tutkimuksista on löydetty useita matematiikan oppimiseen vaikuttavia tekijöitä, joita ovat muun muassa oppilaan minäkäsitys, motivaatio, tunteet ja sitoutuneisuus ja siihen liittyvä luottamus omiin taitoihin. Näiden on todettu olevan riippuvaisia matematiikan osaamisesta. [131, 71] Tämän vuoksi vuoden 2011 TIMSS-tutkimuksesta saadut tulokset suomalaisten oppilaiden vähäisestä sitoutuneisuudesta matematiikan opiskeluun ovat huolestuttavia ja ratkaisua motivaation löytymiseksi tulee etsiä muualta kuin perinteisistä opetusmenetelmistä.

Tavoittelin myönteistä suhtautumista ja motivaatiota opiskelua kohtaan ongelmaperustaisen oppimisen kautta, hyödyntämällä monenlaisia toimintamateriaaleja sekä perehdyttämällä oppilaat mittaamisen historiaan. Toimintamateriaalin käyttäminen osana käsitteenmuodostusprosessia on kiinnostanut suomalaisia väitöskirjantekijöitä [98]. Aihetta on tutkittu mm. vertailemalla suomalaista ja unkarilaista matematiikan opetusta sekä havainnoimalla oppilaiden reaktioita toimintamateriaaliin [78, 113, 123]. Esimerkiksi Havu-Nuutisen [38] tutkimuksessa 5-6 vuotiaiden lasten käsitteiden muuttumisesta fysiikkaan liittyvien ilmiöiden opiskelussa todettiin siihen tarvittavan kokeellisen toiminnan lisäksi ongelmanratkaisutaitoja. Ongelmaperustaisessa oppimisessa oppilaan matemaattinen ajattelu kehittyy ymmärtämisen ja tiedon rakentamisen kautta. Oppilaita ohjataan toiminnan ja konkretian kautta itsenäiseen ja monipuoliseen työskentelyyn ja uuden tiedon liittämistä jo opittuun tietoon pidetään olennaisena matemaattisen tiedon kehittymiselle. [110]

Toiminnallisessa oppimisessa korostuu oppijan aktiivinen rooli tiedon konstruoinnissa ja oppiminen liitetään oppilaan omaan kokemusmaailmaan tekemisen ollessa tavoitteellista sekä osana laajempia oppimiskokonaisuuksia. Toiminnallisella oppimisella pystytään huomioimaan oppilaan kehityspsykologinen ikäkausi: ikävaihetta noin kuudesta vuodesta eteenpäin kutsutaan lapsuuden keskivaiheeksi. Tällöin lapsesta kehittyy aktiivinen suhteessa omiin taitoihin ja oppimiseen ja puheen toiminnan säätelyn kehitys mahdollistaa mm. matematiikan kielentämisen. [2] Käsitteiden rakentumiseksi tärkeässä osassa alkuopetusikäisellä oppilaalla on mm. oman toiminnan kuvaaminen ääneen tai kirjallisesti, mikä otettiin materiaalin kehittämisessä ja tuntirakenteita suunniteltaessa huomioon.

Suomessa ei ole tutkittu mittaamisen opettamista, eikä tutkimuksia toiminnallisen oppimisen tai ongelmaperustaisen oppimisen hyödyntämisestä mittaamisen opettamisessa ole tehty. Toiminnallisia työtapoja on hyödynnetty hyvin oppimistuloksin muilla matematiikan aihealueilla [121, 123], joten menetelmän valinta osaksi mittaamisen opettamista tuntui luontevalta ja kiinnostavalta. Ongelmaperustaista oppimista on niin ikään hyödynnetty matematiikan opiskelussa jo pitkään ja menetelmän koettiin tuovan toiminnallisuuden ohella mielekkyyttä mittaamisen oppimiseen. Teoreettinen ongelma-analyysi loi tavoitteet toiminnallisen ja ongelmaperustaisen oppimateriaalin luomiselle ja kehittämisessä huomioitiin materiaalille asetetut päätavoitteet (s. 39).

Miten tässä kehittämistutkimuksessa kehitetty oppimateriaali soveltuu pituuden ja massan opetukseen

Vastauksen siihen, miten tässä kehittämistutkimuksessa kehitetty oppimateriaali soveltuu pituuden ja massan opetukseen, sain havainnoimalla oppitunteja ja oppilaiden tuotoksia opetusjakson aikana. Koska testasin kehitettyä oppimateriaalia pienellä kohderyhmällä ($n = 24$), ei saatuja tuloksia voida suoraan yleistää. Tuloksia voidaan kuitenkin pitää suntaa antavina.

Yhteiset keskustelut ja oppilaiden väliset keskustelut työskentelyn aikana sekä oppilaiden omien kokemusten esiintuominen toivat esiin oppilaiden ajattelua mitan käsitteistä ja mahdollistivat oppimisprosessin seuraamisen. Järvinen [56] sai väitöskirjassaan vastaavia tuloksia oppilaiden ajattelun ja osaamisen muutosten seuraamisesta pyrkimällä tekemään oppimisprosessin näkyväksi opettajalle. Oppilaiden keskinäisiä keskusteluja seuraamalla havaitsin oppilaiden hyötyvän vertaisryhmän neuvoista ja ajatuksista ongelmanratkaisutilanteissa. Tämä havainto on yhteneväinen mm. Vygotskyn [130] havaintojen kanssa. Tehtävien ratkaisut ja ratkaisuihin päätyminen käytiin yhdessä oppilaiden kanssa läpi. Erilaiset toimintamateriaalit, *kassimitta*, viivoitin, metrin mitta, mittanauha, tasapainovaaka ja keittiövaat'at sekä lukumääräpalat, olivat isona osana oppituntien kulkua ja motivoivat oppilaita tehtävien tekemiseen.

Mitan käsitteitä määriteltiin toiminnallisuuden ja kehon avulla tapahtuvien aistimusten kautta sekä antamalla oppilaille tietoa mitan käsitteistä. Pituuden mittaamisessa siirryttiin epästandardeista mitoista kohti standardeja mittoja: millimetriä, senttimetriä, desimetriä ja metriä. Pituutta myös opeteltiin mittaamaan uudella välineellä, metrin mitalla, sekä opeteltiin käyttämään oikeita mittayksiköitä mittausten yhteydessä. Vastaavasti massan yhteydessä opeteltiin käyttämään grammaa ja kilogrammaa massan mittayksiköinä sekä tutustuttiin massan punnitsemiseen käytettävien tasapainovaakojen ja keittiövaakojen avulla. Konkretia, yhteys arkitodellisuuteen ja etenemisen epästandardeista mitoista kohti standardimittoja motivoivat, kiinnostivat ja innostivat oppilaita toimimaan pareittain ja ryhmissä tuntitehtävien parissa. Havainnot ovat yhteneviä muiden toiminnallista ja ongelmaperustaista oppimista hyödyntävien tutkimusten kanssa (mm. [123]).

Oppilaat olivat kiinnostuneita pituudesta ja massasta ja osallistuivat opetustilanteissa keskusteluun ja tehtävien tekemiseen motivoituneesti. Konkreettiset mitat ja painot hyödyttivät oppilaita mitan käsitteiden ymmärtämisessä ja oppilaiden omat kokemukset saivat heidät seuraamaan opetusta tarkkaavaisesti ja käsitteitä konkretisoitiin oppilaille toiminnan kautta. Mitan käsitteisiin liittyvillä tarinoilla ja keskusteluilla pyrittiin edesauttamaan konseptuaalisen tiedon kasvua yhdessä mittaproseduurien oppimisen kanssa ja taitojen kehittymistä havainnoitiin oppilaiden kielentäessä ajatteluaan. Opetuksen tavoitteena oli, että oppilaat ymmärtäisivät mitan käsitteen ja olisivat tietoisia erilaisista pituuksista ja massoista ympärillään. Mitan käsitteiden oppimisessa hyödynnettiin oppilaiden arkikokemuksia pituudesta ja massasta, jolloin oppiminen tapahtui aidossa kontekstissa. Monet oppilaista tiesivät esimerkiksi kulkemansa koulumatkan tai hiihtämänsä reitin pituuden ja osasivat kertoa matkan pituuden kilometreinä.

Oppilaiden suullisista ja kirjallisista vastauksista havaitsin niin mittaproseduurien kuin konseptuaalisen tiedon kehittyvän opetusjakson aikana. Oppilaat kehittivät taitaviksi mittaamaan pituuksia epästandardeilla ja standardeilla mitoilla ja mittayksiköiden yhteys mitattuihin pituuksiin tuli oppilaille ymmärretyksi. Omasta kehosta löytyvillä mitoilla, *kasimitalla*, metrin mitalla sekä mittanauhalla, mitattiin usein mittavälinettä pidempiä pituuksia ja viivoittimella puolestaan mittavälinettä lyhyempiä pituuksia. Havaitsin oppilaiden ymmärtävän monia mittaamiseen liittyviä konseptuaalisen tiedon komponentteja. Oppilaiden vastausten perusteella koin heidän ymmärtäneen mittayksikön iteratiivisuuden ja identtisuuden sekä mittayksikön ja mittaluvun kääntäen verrannollisuuden. Oppilaat myös ymmärsivät, miksi mitatesa ei saanut jäädä rakoja tai tulla päällekkäisyyksiä mittayksiköiden välille. Oppilaat oppivat yksikkömuunnokset senttimetrin ja metrin välillä ja vastaavasti ymmärsivät kilogramman ja gramman välisen yhteyden.

Oppikirjoista irrallisen materiaalin käyttäminen antaa opettajalle vapauden toteuttaa tunnit perinteisestä matematiikan tunnista poikkeavalla tavalla. Kun tehtävät ovat toiminnallisia ja vaativat ongelmanratkaisutaitoja sekä oppilaan omaa aktiivista tiedon rakentamista, on tehtäväkokonaisuuksissa haastetta monenlaiselle oppilaalle. Kun perinteiset oppikirjat saattavat Joutsenlahden ja Vainionpään [53] mukaan aiheuttaa hitaammille oppilaille ahdistusta sekä luoda heille mielikuvan itsestä heikona matematiikan osaajana, ei tässä kehittämistutkimuksessa luodulla oppimateriaalilla synny vastaavanlaisia huomioita oman etenemisen hitaudesta tai nopeudesta jokaisen toteuttaessa tehtäviä itselle sopivimmalla tavalla. Materiaali kehittää lisäksi oppilaiden taitoja ratkaista ennestään uudenlaisia tehtäviä aiemmin opittuja tietoja ja taitoja yhdistelemällä.

Toiminnallista ja ongelmaperustaista oppimista hyödyntävien tehtävien tekeminen oli motivoivaa, mutta varsin haastavaa ja aikaa vievää. Oppilaat joutuivat osallistumaan omaan oppimiseensa eri tavalla kuin oppikirjan tehtäviä tehdessä ja omien ajatusten ja ideoiden toteuttamisen havaittiin vaativan paljon keskittymistä. Jatkuvan toiminnallisuuden koettiin tarvitsevan rinnalleen mekaanista laskemista ajatusten koakoamiseksi ja opintokokonaisuuksien rauhoittamiseksi. Kehittämisyvaiheen III tavoitteeksi asetettiin näiden havaintojen pohjalta laskurutiineja ja mittayksiköjä vahvistavan osion kehittäminen. Lisäksi mittayksiköiden oikeinkirjoituksen ja lyhenteiden opettamiseen huomattiin tarvittavan riittävästi toistoja. Materiaalin haasteiksi havaittiin myös oppituntien ajankäyttö ja tehtävien ohjeistus, sillä oppilaat saivat tehtävät tehtyä hyvin eri aikaan, minkä vuoksi osalle oppilaista tuli varsin paljon odotteluaikaa. Vastauksena näihin haasteisiin tulisi kehittää toiminnallista ja ongelmaperustaista oppimista tukeva lisätehtävämateriaali, jota oppilaat voisivat tehdä itsenäisesti saatuaan varsinaiset tuntitehtävät valmiiksi.

8.2 Tutkimuksen luotettavuuden arviointi ja eettiset näkökulmat

Tutkimuksen luotettavuuden arvioimisessa yksi tärkeimmistä kriteereistä on tutkijoiden tieteellisten käytänteiden noudattaminen eli uskottavuus [124]. Tätä tutkimusta tehdessä on noudatettu tiedeyhteisön tunnustamia toimintatapoja, huolellisuut-

ta, tarkkuutta, avoimuutta ja muiden tutkimusten asianmukaista huomioonottamista [127].

Kehittämistutkimusta pidetään luotettavuuden tarkastelun suhteen haasteellisenä tutkimusmenetelmänä. Tämän tutkimuksen luotettavuutta tarkastellaan kappaleessa 2.3 kuvattujen Design-Based Research Collectiven [24] määrittelemien laadukkaan kehittämistutkimuksen tavoitteiden sekä Lincolnin ja Guban [77] luokittelun avulla. Tämä tutkimus on edennyt sykleittäin sisältäen jatkuvaa arviointia ja kehittämistä, jotta saavutettaisiin tieteellisen tutkimuksen uskottavuus, luotettavuus ja vahvistettavuus. Kaikki syklit on lisäksi dokumentoitu pro gradu -tutkielman muodossa tarkasti luotettavuuden ja vahvistettavuuden arvioimiseksi. Siirrettävyyden arvioimiseksi on pyritty luomaan sellainen pituuden ja massan mittaamiseen soveltuva oppimateriaali, jonka opettajat voivat ottaa käyttöön omassa opetuksessaan ja luotu oppimateriaali on jokaisen ladattavissa (liite B). Oppimateriaalin toimivuutta testattiin autenttisissa luokkahuonetilanteissa tutkijan toimiessa sekä tutkijana että opettajana.

Tutkimuksen heikkoutena voidaan pitää pientä otoskokoa ($n = 24$), jolloin tutkimuksesta analysoidut ja tulkitut tulokset eivät kuvaa kokonaistilannetta niin hyvin kuin esimerkiksi kvantitatiivisilla tutkimusmetodeilla olisi mahdollista kuvata. Vaikka luotettavuutta ei voida todentaa tilastollisesti, on saatujen tulosten vahvuus niiden siirrettävyydessä [29]. Luotettavuuden lisäämiseksi tässä tutkimuksessa hyödynnettiin aineistoon kohdistuvaa triangulaatiota eli samaa asiaa tutkittiin erilaisten aineistojen, kuten havainnoinnin, haastattelun, kehittämistuotoksen ja kehittämiskuvauksen, avulla. Metodista triangulaatiota hyödyntämällä eli aineiston analysointia samaan aikaan sekä kvalitatiivisesti että kvantitatiivisesti tutkittavista ilmiöistä oltaisiin saatu kokonaisvaltaisempi kuva. Koska monimenetelmäisyys vie paljon aikaa ja resursseja, koettiin metodinen triangulaatio vaikeaksi toteuttaa tämän tutkimuksen puitteissa.

Tämän tutkimuksen teoreettisessa osiossa on pyritty monipuoliseen näkökantaa ja huolelliseen argumentointiin uskottavuuden tarkastelemiseksi. Tutkimuksessa käytetyn sisällönanalyysin haasteena on tutkimustuloksen perustuminen tutkijan subjektiiviseen näkemykseen, sillä tutkijan kyky pelkistää ja luokitella aineistoa mahdollisimman luotettavasti vaikuttavat sisällönanalyysin luotettavuuteen [124]. Luotettavuuden lisäämiseksi aineiston analysoimisessa voidaan käyttää toista tutkijaa arvioimaan tulosten vastaavuutta.

Videoaineiston havainnoiminen mahdollistaa luokkahuonetilanteiden tulkitsemisen ja ympäristön huomioimisen niin kuin kuvaushetkellä on tapahtunut. Rajoittavia tekijöitä videotallenteiden tarkastelussa ovat videon kuvakulma, joka ei kata koko luokkahuonetta ja äänentoisto, joka ei erottele puhetta usean ihmisen puhuessa yhtä aikaa. Havainnoissa on lisäksi otettava huomioon kameran vaikutus tutkittaviin ja heidän toimintaansa. Suurimmassa osassa tuntitilanteista oppilaat eivät kiinnittäneet kameraan huomiota, mutta videoilta havaitaan myös satunnaista esiintymistä kameralle.

Luokanopettajan haastattelu toteutettiin henkilökohtaisena haastatteluna, jonka kysymykset oli päätetty etukäteen. Haastattelun luotettavuuden kannalta on tärkeää vastausten riippumattomuus haastattelun tekijästä [43]. Luokanopettajalle kerrottiin tutkimuksen tarkoitus ja saatiin lupa haastattelun videoimiselle. Haastattelu litteroi-

tiin sanatarkasti, mikä lisäsi haastattelun pohjalta tehtyjen tulkintojen luotettavuutta.

Tutkimusprosessin tulee olla moraalisesti ja eettisesti hyvien tutkimuskäytänteiden mukaisia eikä tieteen etiikan kannalta ole yhdentekevää minkälaiset arvot ohjaavat tutkijaa ja tutkimusta. Pietarisen [105] ja Alasuutarin [4] mukaan eettisesti kestävä tutkimus on tutkimusta, jossa jo tutkimusaiheen valinnasta julkaisuun asti on huomioitu tutkimuseettiset tekijät, kuten tutkimuksen luotettavuus, rehellisyys ja avoimuus. Tutkittaville henkilöille on eettisten vaatimusten mukaan taattava yksityisyyden suojaaminen [72], tutkimukseen osallistumisen vaarattomuus [106] sekä se, ettei heille koidu tutkimukseen osallistumisesta haittaa, vahinkoa tai moraalista vääryyttä [133]. Tutkittavien on myös eettisten vaatimusten mukaan oltava tietoisia osallisuudestaan tutkimukseen [72]. Nämä vaatimukset korostuvat erityisesti lapsiin kohdistuvissa tutkimuksissa. Tätä tutkimusta tehdessä on noudatettu kaikkia edellä kuvattuja hyvän eettisen tutkimuskäytännön piirteitä. Kerätty tutkimusaineisto säilytetään lisäksi niin, ettei ulkopuolisilla ole siihen pääsyä ja aineistoa käytetään vääristelemättä ja muuntelematta sen sisältöä. Oppilaiden henkilöllisyys pysyy tutkielmassa salassa: oppilaisiin viitataan juoksevasti kirjaimin A – X sattumanvaraisessa järjestyksessä, eikä koulua ja luokkaa mainita.

8.3 Pohdinta ja jatkotutkimusmahdollisuudet

Tämän kehittämistutkimuksen kehittämistuotoksena syntyi pituuden ja massan mittaamiseen soveltuva opetuskokonaisuus. Kehitetyn materiaalin testaamisesta saadut tulokset olivat innostavia sekä oppilaiden, tutkimusluokan luokanopettajan että minun itseni kokemana. Koska mittaamistaidot ovat olleet heikosti osattu aihealue niin PISA [131] kuin TIMSS-tutkimuksissa [71], sekä myös oman kokemukseni mukaan, oli kiinnostavaa pureutua mittojen ja mittaamisen taustoihin. Kiinnostavaksi aiheen teki myös mittaamisen poikkeava luonne perinteiseen laskemiseen nähden: olemme tottuneet laskemaan esimerkiksi luokan oppilaiden lukumäärän välittämättä oppilaiden pituudesta tai massasta. Mittaamisessa yksikön valinnalla on kuitenkin merkitystä, eikä mittayksikkö voi muuttua kesken mittauksen.

Varhaisimmat mitat muodostuivat konkreettisista tarpeista mitata painoa ja pituutta. Mittayksiköt olivat aluksi hyvin riippuvaisia ajasta ja paikasta, sillä mittaaminen perustui lähes pelkästään ihmiskehosta löytyviin, käytännöstä kumpuaviin mittoihin. Nykyinen mitan käsite on syntynyt ihmisen toiminnan tuloksena, eikä esimerkiksi metriä pidetä enää antiikin filosofien tapaan luonnosta löytyvänä muuttumattomana totuutena tai 1700-luvun lopun "luonnonvakioihin", maapallon ympärysmittaan ja veden tiheyteen, perustuvana mittana. [100] Mittaamisen historiaan perehtyminen kiinnitti huomion mitan käsitteiden vaiheikkaaseen ja pitkään historiaan. Yhtenäisen SI-järjestelmän mukaisilla mittayksiköillä on lyhyt käyttöhistoria ja ihmiset ovat kautta aikojen hyödyntäneet omasta kehosta ja lähiympäristöstä löytyviä mittoja. Vasta teollistumisen myötä koettiin yhtenevien mittayksiköiden tarve riittävän suureksi, että SI-järjestelmä lähti yleistymään. Opetuksen lähtiessä oman kehon mitoista kohti standardimittoja, tulee yhtenevien mittavälineiden käyttämisen merkitys oppilaille esiin konkreettisesti, elämyksellisesti ja luontevasti. Omien ko-

kemusten myötä oppilaan ymmärrys mitan käsitteestä kasvaa ja kehittyy. Vastaavasti päästessään itse kokeilemaan ja keksimään senttimetrin ja metrin välisen yhteyden, ei suhdeluku ole vain abstrakti ulkoa opittava asia, vaan muistijälki ja ymmärrys syntyvät oman tekemisen myötä. Koin pituuden mittaamisen historian ja kehityskaaren esiintuomisen luovan oppilaille pohjaa ymmärryksen syntymiselle ja syvenemiselle.

Oppikirja-analyysissä esiin noussut massa- ja painokäsitteiden sekava käyttö jäi mietityttämään. Vaikka käytin materiaalissani käsitteenä painoa ja yksikkönä kilogrammaa, olen kehittämisprosessin jälkeen pohtinut, tulisiko alkuopetuksesta lähtien käyttää oikeaa käsiteparia, massaa ja kilogrammaa. Omien havaintojeni mukaan yläkoulun oppilailla on vaikeuksia ymmärtää painon ja massan eroa, kun alkuopetuksesta lähtien käsitteistä käytetään ristiin tai synonyymeinä. Matematiikan ja fysiikan opiskelussa tulee esiin monia muitakin käsitteitä, jotka eroavat arkikäsitteenä ja fysikaalisena käsitteenä toisistaan, mutta näistä juuri painon ja massan välinen ero tuntuu olevan haastava ymmärtää. Oppimateriaalin testausvaiheen jälkeen koin massakäsitteen vaativan useamman oppitunnin mitä käytettävissä oli, sillä massa oli oppilaille selkeästi vieraampi ja haastavampi ymmärtää kuin pituus. Näen massakäsitteen tutkimisen mielenkiintoiseksi tutkimusmahdollisuudeksi ja olisi avartavaa selvittää yläkoulun oppilaiden käsityksiä massasta ja painosta.

Mittaamisen opettamisen ja oppimisen tutkimiselle on monia jatkotutkimusmahdollisuuksia, sillä Suomesta puuttuvat tyystin mittaamiseen kohdistuvat tutkimukset. Varsinkin oppilaiden mitan käsitteen ymmärtämistä ja mittaproseduurien osaamista voitaisiin tutkia niin ala- kuin yläkoulun oppilailla. Tutkimukset voitaisiin laajentaa myös esikouluun, jossa käsitellään pituutta mm. vertailun kautta. Erityisen kiinnostavaa olisi tutkia oppilaiden taitoja niin kutsutuissa "rikkinäisen viivoittimen" -tehtävissä, joissa oppilaiden käsitteellisen ymmärtämisen tasosta saataisiin syvällisempää tietoa kuin tavallisella viivoittimella suoritettujen tehtävien tuloksista.

Oppikirja-analyysissä havaittiin nykyisten (POPS2004) oppikirjojen mittaamision tehtävien olevan hyvin perinteisiä, suurimmaksi osaksi mittayksikkömuunnoksia sisältäviä ja peruslaskutaitoja vahvistavia tehtäviä. Kiinnostava jatkotutkimusmahdollisuus onkin analysoida uuden Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteiden 2016 [95] mukaisten oppikirjojen tehtäviä. Olisi kiinnostavaa tutkia, kuinka uusissa oppikirjoissa on huomioitu opetussuunnitelman tuomat mahdollisuudet toteuttaa opetusta syvemmin ja laajemmin, sekä ilmiölähtöisyys huomioon ottaen. Jotta saataisiin laajempi kuva mittaamisen opettamisesta, oppikirja-analyysiin tulisi sisällyttää kaikkien vuosiluokkien 1–6 mittaamista käsittelevät osiot.

Myös digitalisaatio voidaan ottaa huomioon mittaamisen opettamisessa. Erilaiset karttasovellukset tarjoavat mahdollisuuden esimerkiksi oman koulumatkan pituuden tutkimiseen ja älypuhelinpaikannuksen avulla omat havainnot matkan pituuden tuntumisesta voidaan yhdistää todellisuuteen. Avainasemassa mittaamisen oppimisessa ovat oppilaiden oma kiinnostus, motivaatio ja opiskeltavan aiheen yhteys todellisuuteen, jotka tulisi ottaa huomioon opetusta suunniteltaessa.

Tämän tutkimuksen tekeminen oli opettavaista ja mielenkiintoista, ja koin tutkimusprosessin aikana kehittyväni opettajana sekä saavani uutta näkökulmaa toimia aineenopettajana. Alkuopetuksessa luodaan vahvaa pohjaa matematiikan oppimiselle.

le sekä suhtautumiselle matematiikkaan oppiaineena, minkä vuoksi koin tärkeäksi tutustua mittaamisen opettamiseen ja oppimiseen alkuopetuksesta käsin. Koska matematiikka on lisäksi kumulatiivinen oppiaine uusien tietojen rakentuessa jo opittujen tietojen varaan, tulee heikoksi havaittuja taitoja pyrkiä vahvistamaan heti, ei vasta yläkoulussa tai lukiossa. Liian lyhyen viivoittimen omistaneelle 7-luokkalaiselle voinkin nyt tokaluokkalaisen sanoin antaa yksinkertaisen neuvon: "*siirrä sitä mittaa aina eteenpäin!*"

Kiitän, kumarran, niiaan, vilkutan!

Lämmin kiitos kaikille graduni tekemiseen vaikuttaneille läheisilleni, tutkimusluokan luokanopettajalle, Solmu-ohjelman kehittäjälle sekä graduohjaajalleni. Kiitos!

Lähteet

- [1] Aho, S. (1996). *Lapsen minäkäsitys ja itsetunto*. Helsinki: Oy Edita Ab.
- [2] Ahonen, A., & Kankaanranta, M. (2015). *Introducing assessment tools for 21st century skills in finland*. In P. Griffin, & E. Care (eds.), *Assessment and teaching of 21st century skills; methods and approach*. Dordrecht: Springer, (pp. 213-226).
- [3] Ahtee, M. & Pehkonen, E. (2000). *Johdatus matemaattisten aineiden didaktiikkaan*. Helsinki: Oy Edita Ab.
- [4] Alasuutari, P. (2005). *Yhteiskuntatutkimuksen etiikasta*. Teoksessa P. Räsänen, A-H. Anttila & H. Melin (toim.) *Tutkimus menetelmien pyörteissä. Sosiaalitutkimuksen lähtökohdat ja valinnat*. Jyväskylä: PS-kustannus, (s. 15-28).
- [5] Alder, K. (2002). *The measure of all things : The seven-year odyssey and hidden error that transformed the world*. New York: Free Press.
- [6] Anderson, T. & Shattuck, J. (2012). *Design-based research: A decade of progress in education research?*. *Educational researcher*, 41(1), (pp. 16-25).
- [7] Aristoteles., Jatakari, T., Näätäsaari, K., Pohjanlehto, P., & Knuuttila, S. (2012). *Metafysiikka*. Helsinki: Gaudeamus.
- [8] Atjonen, P. (2008). *Vieläkö etsimme oikeaa ja hyvää? Aikamme kasvatuksen ja kasvatustieteen eettisiä haasteita*. Teoksessa P. Siljander & A. Kivelä (toim.) *Kasvatustieteen tila ja tutkimuskäytännöt. Paradigmat katosivat, mitä jäljellä? Suomen kasvatustieteellinen seura*, (s. 113–142).
- [9] Barab, S., & Squire, K. (2004). *Design-based research: Putting a stake in the ground*. *The Journal of the Learning Sciences*, 13(1), (pp. 1–14).
- [10] Battista, M. (2006). *Understanding the development of students thinking about length*. *Teaching children mathematics*, October, 13(3), (pp. 140–147).
- [11] Bauersfeld, H. (1995). *"Language games" in the mathematics classroom: their function and their effects*. In P. Cobb, & H. Bauersfeld (eds.) *The emergence of mathematical meaning: interaction in classroom cultures*. Hillsdale, New Jersey: Erlbaum, (pp. 271–294).
- [12] BIPM (2006). *Le Système international d'unités - The International System of Units*. (8th ed.). Paris: Bureau International des Poids et Mesures.
- [13] BIPM. On the future revision of the SI. Luettu 14.3.2015. <http://www.bipm.org/en/measurement-units/new-si/#communication>

- [14] Boud, D. & Feletti, G. (1999). *Ongelmalähtöisen oppimisen muuttuvat kasvot*. Teoksessa D. Boud & G. Feletti (toim.) *Ongelmalähtöinen oppiminen – Uusi tapa oppia*. Hakapaino: Helsinki
- [15] Bragg, P., & Outhred, L. (2004). *A measure of rulers - the importance of units in a measure*. The 28th International Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Vol. 2, 14-18 July 2004, Bergen, Norway, (pp. 159–166).
- [16] Brown, A. (1992). *Design experiments: Theoretical and methodological challenges in creating complex interventions in classroom settings*. The Journal of the Learning Sciences, 2(2), (pp. 141–178).
- [17] Chapin, S., O'Connor, C. & Canavan Anderson, N. (2009). *Classroom discussions: Using math talk to help students learn*. Sausalito, California, USA: Math Solutions.
- [18] Cheeseman, J., McDonough, A., & Clarke, D. (2011). *Investigating children's understanding of the measurement of mass*. In J. Clark, B. Kissane, J. Mousley, T. Spencer, & S. Thornton (Eds.), *Mathematics: Traditions and [new] practices* (Proceedings of the 34th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australia and the Australian Association of Mathematics Teachers). Adelaide: AAMT & MERGA, (pp. 174–182).
- [19] Cheeseman, J., McDonough, A., & Ferguson, S. (2012). *The effects of creating rich learning environments for children to measure mass*. In J. Dindyal, L. Pien Cheng and S. Fong Ng (Eds.), *Mathematics Education: Expanding Horizons* (Proceedings of the 35th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia Inc.)
- [20] Cohen, L., Manion, L. & Morrison, K. (2007). *Research methods in education*. (6th ed.). New York: Routledge.
- [21] Collins, A. (1992). *Toward a design science education*. Teoksessa E. Scanlon & T. O'Shea (eds.) *New directions in educational technology*. Berlin: Springer, (pp. 15–22)
- [22] Czichos, H., Saito, T., Smith, L. (2011). *Springer Handbooks of metrology and testing*.
- [23] Dede, C. (2004). *If design-based research is the answer, what is the question? A Commentary of Collins, Joseph, and Soloway in the JLS special issue on design-based research*. The Journal of the Learning Sciences, 13(1), (pp. 105–114).
- [24] Design-Based Research Collective. (2003). *Design-based research: An Emerging paradigm for educational inquiry*. Educational Researcher, 32(1), (pp. 5–8)
- [25] Dewey, J. (1933). *How we think. A restatement of the relation of reflective thinking to the educative process*. Boston, Mass: Heath.

- [26] Drake, S. (1999a). *Essays of Galileo and the history and philosophy of science, Volume I*. Toronto, Buffalo, London: University of Toronto Press.
- [27] Drake, S. (1999b). *Essays of Galileo and the history and philosophy of science, Volume II*. Toronto, Buffalo, London: University of Toronto Press.
- [28] Edelson, D. (2002). *What we learn when we engage in design*. The Journal of the Learning Sciences. 11, (pp. 105–121).
- [29] Edelson, D. (2006). *What we learn when we engage in design: Implications for assessing design research*. In J. van den Akker, K. Gravemeijer, S. McKenney & N. Nieveen, Educational Design Research. Abingdon, Oxon: Routledge, (pp. 156–165).
- [30] Engeström, Y. (2001). *Expansive learning at work: Toward an activity theoretical reconceptualization*. Journal of Education and Work 14 (1), (pp. 133–156).
- [31] Gagné, R. M. (1977). *The conditions of learning*. (3th ed.). USA: Holt, Rinehart and Winston.
- [32] Galilei, G. (cop. 1914). *Dialogues concerning two new sciences*. New York: Dover.
- [33] Gray, E., & Tall, D. (1994). *Duality, ambiguity and flexibility: A proceptual view of simple arithmetic*. Journal for Research in Mathematics Education 26(2), (pp. 115–141).
- [34] Haapasalo, L. (1998). *Mahdollisuuksia ja esteitä matematiikan ja luonnontieteiden integroitujen opiskeluympäristöjen toteuttamiselle*. Teoksessa S. Kaartinen (toim.), Matemaattisten aineiden opetus ja oppiminen. Matematiikan ja luonnontieteiden opetuksen tutkimuspäivät 1996. Oulun yliopisto. Kasvatustieteiden tiedekunnan opetusmonisteita ja selosteita 78, (s. 33–49).
- [35] Haapasalo, L. (2011). *Oppiminen, tieto ja ongelmanratkaisu* (8. päiv. painos). Joensuu: Medusa-Software.
- [36] Hakkarainen, K., Lonka, K. & Lipponen, L. (1999). *Tutkiva oppiminen. Älykään toiminnan rajat ja niiden ylittäminen*. 1.–4.painos. Helsinki: WSOY.
- [37] Hart, K. (1981). *Children's understanding of mathematics: 11–16*. London, UK: John Murray.
- [38] Havu-Nuutinen, S. (2002). *Sosiokonstruktivistisen pedagogiikan merkitys lasten tiedon konstruoinnille*. Kasvatus 33 (2), (s. 175–188).
- [39] Hiebert, J. (1981). *Cognitive development and learning linear measurement*. Journal for Research in Mathematics Education, 12, (pp. 197–211).
- [40] Hiebert, J. (1984). *Why do some children have trouble with learning measurement concepts?* Arithmetic Teacher, 31, (pp. 19–24).

- [41] Hiebert, J & Lefevre, P. (1986). *Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis*. In J. Hiebert (eds.) 1986. Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics. Hillsdale, New Jersey: Erlbaum, (pp. 1–27).
- [42] Hihnala, K. (2005). *Laskutehtävien suorittamisesta käsitteiden ymmärtämiseen. Peruskoululaisen matemaattisen ajattelun kehittyminen aritmetiikasta algebraan siirryttäessä*. Jyväskylän yliopisto. Jyväskylä studies in education, psychology and social research 278.
- [43] Hirsjärvi, H., Remes, P., & Sajavaara, P. (2007). *Tutki ja kirjoita*. Keuruu: Otavan Kirjapaino Oy.
- [44] IES. National Center for Education Statistics. *National assessment of educational progress (NAEP)*. Luettu 9.9.2016. <https://nces.ed.gov/nationsreportcard/mathematics/whatmeasure.aspx>.
- [45] Ihme, I. (2009). *Arviointi työvälteenä. Lasten ja nuorten kasvun tukeminen*. Opetus 2000. Juva: WS Bookwell Oy.
- [46] Ikäheimo, H. 1997. *Matematiikan esi- ja alkuopetuksen kysymyksiä*. Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.) Matematiikka - näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. Niilo Mäki Instituutti & Koulutuksen tutkimuslaitos. Jyväskylä: Yliopistopaino, (s. 239–250).
- [47] Johnson, R., & Onwuegbuzie, A. (2004). *Mixed method research: A research paradigm whose time has come*. Educational Researcher 33 (7), (pp. 14–26).
- [48] Jokiaho, E. (2002). *Esi- ja alkuopetusikäisten lasten minäkuvia. Päämääränä hyvä itsetunto: lapset arvioivat itseään, opettaja tukee arviointia*. Pro gradu -tutkielma. Jyväskylän yliopisto. Jyväskylä: Jyväskylän opettajankoulutuslaitos.
- [49] Joutsenlahti, J. (2003). *Kielentäminen matematiikan opiskelussa*. Teoksessa A. Virta & O. Marttila (toim.) Opettaja, asiantuntijuus ja yhteiskunta. Ainedidaktinen symposium 7.2.2003. Turun yliopiston kasvatustieteiden tiedekunnan julkaisuja B:72. Turku: Turun opettajankoulutuslaitos, (s. 188–196).
- [50] Joutsenlahti, J. (2005). *Lukiolaisten tehtäväorientoituneen matemaattisen ajattelun piirteitä*. Väitöskirja. Tampereen yliopisto. Tampere: Hämeenlinnan opettajankoulutuslaitos.
- [51] Joutsenlahti, J. (2010). *Matematiikan kirjallinen kielentäminen lukiomatematiikassa*. Teoksessa M. Asikainen, P. E. Hirvonen & K. Sormunen (toim.) Ajankohdasta matemaattisten aineiden opetuksen ja oppimisen tutkimuksessa. Reports and Studies in Education, Humanities, and Theology. Joensuu: University of Eastern Finland. (s. 3–15).

- [52] Joutsenlahti, J. & Rättyä, K. (2015). *Kielentämisen käsite ainedidaktisissa tutkimuksissa*. Teoksessa M. Kauppinen, M. Rautiainen & M. Tarnanen (toim.) *Rajaton tulevaisuus. Kohti kokonaisvaltaista oppimista. Ainedidaktiikan symposium Jyväskylässä 13.–14.2.2014. Ainedidaktisia tutkimuksia 8*. Jyväskylä: Suomen ainedidaktinen tutkimusseura, (s. 45–61).
- [53] Joutsenlahti, J., & Vainionpää, J. (2010). *Oppimateriaali matematiikan opetuksessa ja osaamisessa*. Teoksessa E. K. Niemi, & J. Metsämuuronen, J. (toim.), *Miten matematiikan taidot kehittyvät? Matematiikan oppimistulokset peruskoulun viidennen vuosiluokan jälkeen vuonna 2008. Koulutuksen seurantaraportit 2010:2*. Helsinki: Opetushallitus, (s. 137–148). http://www.oph.fi/download/126919_Miten_matematiikan_taidot_kehittyvat.pdf.
- [54] Juuti, K. & Lavonen J. (2013). *Design-tutkimukseen osallistuvien opettajien rooli tutkimuksen eri vaiheissa*. Teoksessa J. Pernaa (toim.) *Kehittämistutkimus opetuslallalla. Opetus 2000 -sarja*. Jyväskylä: PS-kustannus, (s. 45–67).
- [55] Juvonen-Nihtinen, M., Lappalainen, U. & Nevalainen, V. (2004). *Ajattelu ja ongelmanratkaisu*. Teoksessa T. Ahonen, T. Aro (toim.) *Sanat sekaisin: Kielelliset oppimisvaikeudet ja opetus kouluiässä*. PS-kustannus, (s. 122–149).
- [56] Järvinen, M-L. (2011). *Konstruktivistinen oppimiskäsitys opettajan pedagogisena työvälineenä alkuopetuksessa. Näkökulmia muutokseen*. Väitöskirja. Kasvatustieteiden yksikkö. Acta Universitatis Tamperensis: 1595. Tampere: Tampereen Yliopistopaino Oy.
- [57] Kadijevich, Dj. & Haapasalo, L. (2001). *Linking procedural and conceptual mathematical knowledge through CAL*. Journal for Computer Assisted Learning (17), (pp. 156–165).
- [58] Kamii, C. (2006). *Measurement of length: How can we teach it better?*. Teaching Children Mathematics, 13, (pp. 154–158).
- [59] Kamii, C., & Clark, F. (1997). *Measurement of length: The need for a better approach to teaching*. School Science and Mathematics, 97, (pp. 116–121).
- [60] Kananen, J. (2012). *Kehittämistutkimus opinnäytetyönä. Kehittämistutkimuksen kirjoittamisen käytännön opas*. Jyväskylä; Jyväskylän ammattikorkeakoulu.
- [61] Kasanen, K. (2003). *Lasten kyvykäsitykset koulussa*. Väitöskirja. Joensuun yliopiston yhteiskuntatieteellisiä julkaisuja, No 58. Joensuun yliopisto.
- [62] Kelly, E. (2004). *Design research in education: Yes, but is methodological*. The Journal of the learning Sciences, 13(1), (pp. 115–128).
- [63] Kieran, C. (1992). *The learning and teaching of school algebra*. In D. A. Grouws (eds.) *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. New York: Macmillan, (pp. 390-419).

- [64] Kiviniemi, K. (2015). *Design- eli suunnittelututkimus opetus- ja kasvatusalalla*. Teoksessa R. Valli & J. Aaltola (toim.) Ikkunoita tutkimusmetodeihin I. Metodien valinta ja aineistonkeruu: virikkeitä aloitteleville tutkijoille. 4. uudistettu ja täydennetty painos. Jyväskylä: PS-kustannus, (s. 220–240).
- [65] Klein, H. (1974). *The science of measurement : A historical survey*. New York: Dover.
- [66] Kloosterman, P., Rutledge, Z., & Kenney, P. A. (2009). *Exploring results of the NAEP: 1980s to the present*. Mathematics Teaching in the Middle School, 14. (s. 357–365).
- [67] Koyré, A. (1968). *Metaphysics and measurement : Essays in scientific revolution*. London: Chapman & Hall.
- [68] Krzywacki, H., Laine, A., Hästö, P., & Hannula, M. S. (2012). *Matematiikan didaktiikkaa tutkimuksen valossa – kohti kansainvälisyyttä*. Teoksessa A. Kallioniemi & A. Virta (toim.) Ainedidaktiikka tutkimuskohteena ja tiedonalana. Turku: Suomen kasvatustieteellinen seura, (s. 1-14)
- [69] Kupari, P. (1999). *Laskutaitoharjoittelusta ongelmanratkaisuun. Matematiikan opettajien matematiikkauskomukset opetuksen muovaajina*. Jyväskylän yliopisto. Koulutuksen tutkimuslaitos. Tutkimuksia 7. Jyväskylä: Jyväskylän yliopistopaino.
- [70] Kupari, P. (2006) *Student and School factors affecting finnish mathematics achievement: results from TIMSS 1999 data*. In S. J. Howie & T. Plomp (eds.) Contexts of learning mathematics and science. Lessons learned from TIMSS. London: Routledge, (pp. 127–140).
- [71] Kupari, K., Sulkunen, S., Vettenranta J., & Nissinen, K. (2012). *Enemmän iloa oppimiseen. Neljännen luokan oppilaiden lukutaito sekä matematiikan ja luonnontieteiden osaaminen. Kansainväliset PIRLS- ja TIMSS-tutkimukset Suomessa*. Koulutuksen tutkimuslaitos, Jyväskylän yliopistopaino.
- [72] Kuula, A. (2006). *Yksityisyydensuoja tutkimuksessa*. Teoksessa J. Hallamaa, V. Launis, S. Lötjönen & I. Sorvali (toim.) Etiikkaa ihmistieteille. Helsinki: Suomalaisen Kirjallisuuden Seura. Tietolipas 211. (s. 124–140).
- [73] *Laskutaito 2* (2004). Opettajan kirja kevätosa. Tekijät: Sintonen, A-M & Uus-Leponiemi, T. Helsinki: WSOY.
- [74] Laitinen, M., Rantamäki, H., & Joutsenlahti, J. (2015). *Puhutko matematiikkaa*. Teoksessa T. Kaartinen (2015). Monilukutaito kaikki kaikessa. Tampere: Tampereen yliopiston normaalikoulu.
- [75] Lauritzen, P. (2012). *Conceptual and procedural knowledge of mathematical functions*. Publications of the University of Eastern Finland. Dissertations in

Education, Humanities, and Theology, No 34. Joensuu: University of Eastern Finland.

- [76] Lehrer, R., Jaslow, L., & Curtis, C. (2003) *Developing an understanding of measurement in the elementary grades*. In Learning and Teaching Measurement 2003 Yearbook, edited by D. Clements and G. Bright, National Council of Teachers of Mathematics, Reston, (pp. 100–121).
- [77] Lincoln, Y., & Guba, E. (1985). *Naturalistic inquiry*. Beverly Hills, CA: Sage.
- [78] Lindgren, S. (1990). *Toimintamateriaalin käyttö matematiikan opiskelussa*. Väitöskirja. Tampereen Yliopisto: Tampere.
- [79] LUMA Suomi. Valtakunnallinen luonnontieteiden ja matematiikan esi- ja perusopetuksen kehittämisohjelma 2014-2019. *Sujuvuutta ja joustavuutta peruslaskutaitoon!*. Luettu 7.11.2016. <http://www.luma.fi/suomi/4068>.
- [80] Matthews, J. C. (1998). *Somatic knowing and education*. The Educational Forum, 62. (3), (pp. 236–242).
- [81] McKenney, S., & Reeves, T. (2012). *Conducting educational design research*. London: Routledge.
- [82] Merenluoto, K. (2001). *Lukiolaisen reaaliluku. Lukualueen laajentaminen käsitteellisenä muutoksena matematiikassa*. Väitöskirja. Turun yliopiston julkaisu- ja C 176. Turku: Turun yliopisto.
- [83] Merenluoto, K. & Pehkonen, E. (2004). *Luokanopettajaksi opiskelevien matemaattinen osaaminen ja ymmärtäminen*. Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.) *Matematiikka – näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen*. Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti, (s. 414–434).
- [84] Metsämuuronen, J. (toim.) (2013). *Perusopetuksen matematiikan oppimistulosten pitkäjäsenarviointi vuosina 2005-2012*. Koulutuksen seurantaraportti 2013:4. Opetushallitus. Helsinki: Edita Prima Oy. http://www.oph.fi/download/150841_Perusopetuksen_matematiikan_oppimistulosten_pitkittaisarviointi_vuosina_2005.pdf
- [85] VTT. MIKES-metrologia. Luettu 5.9.2016. www.mikes.fi.
- [86] Morley, I & Renfrew, C. (toim.) (2010). *The archeology of measurement. Comprehending heaven, Earth and time in ancient societies*. Cambridge University Press.
- [87] Nasa. Luettu 30.3.2016. http://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/lunar/apollo_15_feather_drop.html
- [88] Naylor, R. (1989). *Galileo's experimental discourse*. In Gooding, D., Pinch, T. J., & Schaffer, S. (eds.) *The uses of experiment : Studies in the natural sciences*. Cambridge: Cambridge University Press.

- [89] Niemi, E. K. (2008). *Matematiikan oppimistulosten kansallinen arviointi 6. vuosiluokalla vuonna 2007. Oppimistulosten arviointi 1/2008*. Opetushallitus. Helsinki: Yliopistopaino. http://www.oph.fi/instancedata/prime_product_julkaisu/oph/embeds/46754_matematiikka_6luokka_2007.pdf
- [90] Niemi, E. K., & Metsämuuronen, J. (toim.). (2010). *Miten matematiikan taidot kehittyvät? Matematiikan oppimistulokset peruskoulun viidennen vuosiluokan jälkeen vuonna 2008*. Koulutuksen seurantaraportit 2010:2. Opetushallitus. Helsinki: Edita. http://www.oph.fi/download/126919_Miten_matematiikan_taidot_kehittyvat.pdf
- [91] Niiniluoto, I. (1997). *Johdatus tieteenfilosofiaan : käsitteen- ja teorianmuodostus*. Helsinki: Otava.
- [92] Nunes, T., Light, P. & Mason, J. (1993). *Tools for thought: The measurement of length and area*. Learning and Instruction, 3, (pp. 39–54).
- [93] *Open kymppi 2* (2013). Tekijät: Rinne, S., Salonen, M., Sintonen, A-M & Uus-Leponiemi, T. Helsinki: Sanoma Pro.
- [94] Opetushallitus (2004). Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2004. Luettu 28.11.2015, http://www.oph.fi/download/139848_pops_web.pdf
- [95] Opetushallitus (2014). Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2014. Luettu 28.11.2015, http://www.oph.fi/download/163777_perusopetuksen_opetussuunnitelman_perusteet_2014.pdf
- [96] Opetushallitus (2014). Esiopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2014. Luettu 5.9.2016, http://www.oph.fi/download/163781_esiopetuksen_opetussuunnitelman_perusteet_2014.pdf
- [97] Opperi. Iloa ja ymmärrystä matematiikkaan! Mittayksikkötaulut ja tukipisteet sekä kortit. Luettu 16.9.2016 http://www.opperi.fi/02_opetusvinkkejä/221_mittayksikkotaulut.html
- [98] Pehkonen, E. (2009). *How Finns learn mathematics: What is the influence of 25 years of research in mathematics education?* In M. Lepik (eds.), Teaching mathematics: Retrospective and perspectives. Proceedings of the 10th international conference, Tallinn University, (pp. 71–101).
- [99] Pehkonen, E., & Rossi, M. (2007). *Some alternative teaching methods in mathematics*. In E. Pehkonen, M. Ahtee, & J. Lavonen (eds.), How Finns learn mathematics and science. Rotterdam: Sense Publishers, (pp. 143–154).
- [100] Perhoniemi, T. (2014). *Mitan muunnelmia : miten määritämme maailmaa, ihmistä ja tietoa*. Tampere: Vastapaino.

- [101] Perkkilä, P. (2002). *Opettajien matematiikkauskomukset ja matematiikan opiskelijan merkitys alkuopetuksessa*. Väitöskirja. Jyväskylä studies in education, psychology and social research 195. Jyväskylä: Jyväskylän yliopisto.
- [102] Pernaa, J. (2013). *Kehittämistutkimus tutkimusmenetelmänä*. Teoksessa J. Pernaa (toim.) *Kehittämistutkimus opetuslallalla*. Opetus 2000 -sarja. Jyväskylä: PS-kustannus, (s. 9–26).
- [103] Piaget, J. & Inhelder, B. (1956). *The child's conception of space*. London: Routledge and Kegan Paul.
- [104] Piaget, J., Inhelder, B. & Szeminska, A. (1960). *The child's conception of geometry*. London: Routledge and Kegan Paul.
- [105] Pietarinen, J. (2002). *Eettiset perusvaatimukset tutkimustyössä*. Teoksessa S. Karjalainen, V. Launis, R. Pelkonen & J. Pietarinen (toim.) *Tutkijan eettiset valinnat*. Helsinki: Gaudeamus, (s. 58–69).
- [106] Piispa, M. (2006). *Kvantitatiivisen tutkimuksen eettiset lähtökohdat. Esimerkkinä naisiin kohdistuvan väkivallan kyselytutkimus*. Teoksessa J. Hallamaa, V. Launis, S. Lötjönen & I. Sorvali (toim.) *Etiikkaa ihmistieteille*. Helsinki: Hakapaino, (s. 141–160).
- [107] Platon., Tyni, M., Itkonen, M., Itkonen-Kaila, M., Anttila, A.M. & Tyni, M. (1999), Teokset. Viides osa, Sofisti ; Valtiomies ; Timaios ; Kritias ; Filebos, Helsinki: Otava.
- [108] Poikela, E. & Poikela, S. (2005). *Ongelmaperustainen opetussuunnitelma – teoria, kehittäminen ja suunnittelu*. Teoksessa E. Poikela & S. Poikela (toim.) *Ongelmista oppimisen iloa – Ongelmaperustaisen pedagogiikan kokeiluja ja kehittämistä*. Tampere: Vammalan Kirjapaino Oy.
- [109] Portimojärvi, T. & Vuoskoski, P. (2006). *Ongelmaperustaisen oppimisen, tieto- ja viestintäteknologian sekä johtajuuden lupaava liitto*. Teoksessa T. Portimojärvi (toim.) *Ongelmaperustaisen oppimisen verkko*. Tampere: Tampereen yliopistopaino Oy.
- [110] Puolimatka, T. (2002). *Opetuksen teoria konstruktivismista realismiin*. Vammala: Vammalan kirjapaino Oy
- [111] Robinson, A., & Ketola, V. (2008). *Mittaamisen historia*. Helsinki: Multikustannus.
- [112] Ruokamo, H. (2000). *Matemaattinen lahjakkuus ja matemaattisten sanallisten ongelmanratkaisutaitojen kehittyminen teknologiaperustaisessa oppimisympäristössä*. Väitöskirja. Helsingin yliopisto. Opettajankoulutuslaitos. Tutkimuksia 212. Helsinki: Yliopistopaino.

- [113] Rätty-Záborszky, S. (2006). *Suomalaisten ja unkarilaisten opettajien ja matematiikan oppikirjan tekijöiden käsityksiä geometriasta ja geometrian opetuksesta ja oppimisesta vuosiluokilla 1–6*. Väitöskirja. Joensuun yliopisto. Kasvatustieteiden tiedekunta. Joensuun yliopiston kasvatustieteellisiä julkaisuja 112.
- [114] Saaranen-Kauppinen, A., & Puusniekka, A. (2006). KvaliMOTV - Menetelmäopetuksen tietovaranto [verkkajulkaisu]. Tampere: Yhteiskuntatieteellinen tietovarasto [ylläpitäjä ja tuottaja]. (Luettu 5.9.2016) <http://www.fsd.uta.fi/menetelmaopetus/>.
- [115] Sandoval, W., & Bell P. (2004). *Design-based research methods for studying learning in context: Introduction*. Educational Psychologist, 39(4), (pp. 199–201).
- [116] Sfard, A. (1991). *On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin*. Educational Studies in Mathematics 22(1), (pp. 1–36).
- [117] Smith, J., Males, L., Dietiker, L., Lee, K., & Mosier, A. (2013). *Curricular treatments of length measurement in the United States: Do they address known learning challenges?*. Cognition and Instruction, 31(4), (pp. 388–433).
- [118] Silfverberg, H. (1999). *Peruskoulun yläasteen oppilaan geometrinen käsitieto*. Tampere: Tampereen yliopisto.
- [119] Sorvari, J., & Pehkonen, E. (2001). *Promoting mathematical thinking: A pilot study for innovative learning environments*. In M. van den Heuvel-Panhuizen (eds.), Proceedings of the PME-25 conference, vol. 4. Utrecht: Freudenthal Institute, (pp. 201–208).
- [120] Stephan, M., & Clements, D. (2003) *Linear and area measurement in prekindergarten to grade 2*. In D. Clements & G. Bright (eds.) Learning and Teaching Measurement: 2003 Yearbook, National Council of Teachers of Mathematics, (pp. 3–16).
- [121] Sura, S. (1999). *Toiminnallisuus alkukasvatuksikäisen oppimisen edistäjänä*. Teoksessa K. Laine & J. Hänninen (toim.) Oppimisen ohjaaminen esi- ja alkuopetuksessa. Turku: Painosalama Oy, (s. 223, 226–227).
- [122] Suureet ja yksiköt. SI-mittayksikköjärjestelmä 2001. Helsinki: Suomen standardisoimisliitto.
- [123] Tikkanen, P. (2008). *"Helpompaa ja hausempaa kuin luulin". Matematiikka suomalaisten ja unkarilaisten perusopetuksen neljäsluokkalaisten kokemana*. Väitöskirja. Tutkimuksia 337. Jyväskylän yliopisto: Jyväskylä.
- [124] Tuomi, J., & Sarajärvi, A. (2009). *Laadullinen tutkimus ja sisällönanalyysi*. Jyväskylä: Tammi.

- [125] Tuohilampi, L. (2016) *Deepening mathematics related affect research into social and cultural. Decline, measurement and the significance of students' multilevel affect in Finland and Chile*. University of Helsinki: Helsinki, Faculty of behavioural sciences department of teacher of education, Research Report 384. Helsinki: University press Unigrafia.
- [126] *Tuhattaituri 2b* (2006). Opettajan opas. Tekijät: Haapaniemi, S., Mörsky, S., Tikkanen, A & Voima, J. Helsinki: Otava.
- [127] Tutkimuseettinen Neuvottelukunta (TENK), (2012). *Hyvä tieteellinen käytäntö ja sen loukkausepäilyjen käsitteleminen Suomessa*. Luettu 7.9.2016. http://www.tenk.fi/sites/tenk.fi/files/HTK_ohje_2012.pdf
- [128] Tynjälä, P. (1999). *Oppiminen tiedon rakentamisena*. 1.–3. Painos. Tampere: Tammer-Paino Oy.
- [129] Vuorinen, I. (2005). *Tuhat tapaa opettaa*. 7. painos. Tampere: Vammalan Kirjapaino Oy.
- [130] Vygotsky, L. (1982). *Ajattelu ja kieli*. Espoo: WG.
- [131] Välijärvi, J., & Kupari, P. (2015). *Millä eväillä uuteen nousuun? PISA 2012 tutkimustuloksia*. Opetus- ja kulttuuriministeriön julkaisuja 2015:6.
- [132] Wang, F., & Hannafin, M. (2005). *Design-based research and technology-enhanced learning environments*. Educational Technology Research and Development, 53(4), (pp. 5–23).
- [133] Wiberg, M., (2006). *Yhteiskuntatiede ja kohteen vahingoittaminen*. Teoksessa J. Hallamaa, V. Launis, S. Lötjönen & I. Sorvali (toim.) *Etiikkaa ihmistieteille*, (s. 261–273).

Liitteet

A Sisällönanalyysi

sivu	tehtävänro	suure	luokka	sivu	tehtävänro	suure	luokka
56	1	pituus	viivoittimen käyttö	164	1	pituus	yhteen- ja vähennyslasku
57	2	pituus	mittaa pituus	164	2	pituus	muunnos
57	k1	pituus	viivoittimen käyttö	164	3	pituus	soveltava
57	k2	pituus	yhteen- ja vähennyslasku	165	4	pituus	päättely
58	3	pituus	viivoittimen käyttö	165	5	pituus	päättely
58	4	pituus	mittaa pituus	165	k1	pituus	päättely
59	5	pituus	viivoittimen käyttö	165	k2	pituus	allekkainlasku
59	6	pituus	mittaa pituus	166	6	pituus	soveltava
63	10	pituus	mittaa pituus	166	7	pituus	valitse pituus
63	11	pituus	piirrä pituus	167	8	pituus	soveltava
67	10	pituus	mittaa pituus	167	9	pituus	päättely
68	1	pituus	lue pituus	168	1	massa	yhteen- ja vähennyslasku
68	2	pituus	mittaa pituus	168	2	massa	muunnos
69	3	pituus	soveltava	168	3	massa	soveltava
69	k1	pituus	mittaa pituus	169	4	massa	soveltava
69	k2	pituus	soveltava	169	5	massa	soveltava
70	4	pituus	mittaa pituus	169	k1	massa	soveltava
70	5	pituus	soveltava	169	k2	massa	allekkainlasku
71	6	pituus	muunnos	170	6	massa	soveltava
71	7	pituus	soveltava	170	7	massa	valitse massa
73	5	pituus	soveltava	171	8	massa	päättely
73	k2	pituus	yhteen- ja vähennyslasku	171	9	massa	soveltava
87	4	pituus	mittaa pituus	173	2	pituus	soveltava
105	3	pituus	mittaa pituus	173	k1	pituus	soveltava
156	1	pituus	yhteen- ja vähennyslasku	175	5	pituus	soveltava
156	2	pituus	muunnos	175	6	pituus	soveltava
156	3	pituus	muunnos	179	5	pituus	muunnos
156	4	pituus	muunnos	179	6	pituus	soveltava
156	5	pituus	muunnos	184	1	pituus	soveltava
156	6	pituus	muunnos	185	2	pituus	soveltava
156	7	pituus	muunnos	185	k1	pituus	soveltava
157	8	pituus	soveltava	186	4	pituus	päättely
157	9	pituus	soveltava	186	5	pituus	päättely
157	k1	pituus	muunnos	187	6	pituus	päättely
157	k2	pituus	soveltava	188	1	massa	soveltava
158	10	pituus	muunnos	188	2	pituus	muunnos
158	11	pituus	päättely	188	3	pituus	muunnos
159	12	pituus	päättely	188	4	pituus	muunnos
159	13	pituus	muunnos	188	5	pituus	muunnos
160	1	pituus	toiminnallinen	189	k1	massa	soveltava
161	2	pituus	toiminnallinen	191	8	pituus	mittaa pituus
161	k1		EI LIITY	193	4	pituus	muunnos
161	k2	pituus	soveltava	193	5	pituus	soveltava
162	3	pituus	valitse pituus				

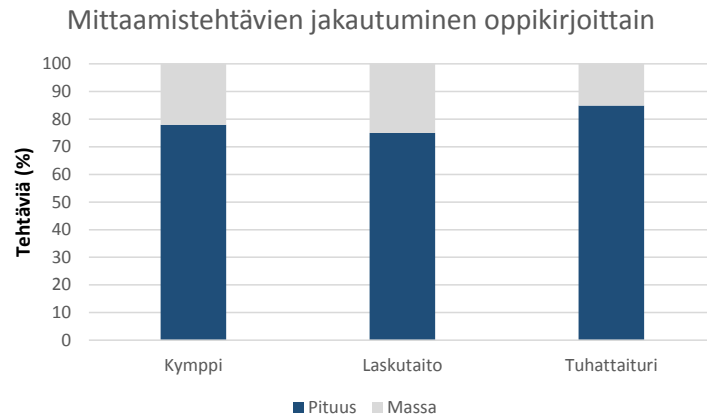
Kuva 1: Aineiston pelkistäminen. *Tuhattaituri* -kirjasta [126] Excel- taulukkoon kootut pituuden ja massan tehtävät. Sivunumerot ovat oppilaan kirjan sivunumeroinnin mukaisia. Tehtävänumeron edessä oleva kirjain *k* tarkoittaa kotitehtävää.

sivu	tehtävänro	suure	luokka	sivu	tehtävänro	suure	luokka
44	1	pituus	soveltava	162	7	pituus	muunnos
47	k1	pituus	soveltava	163	8	pituus	päättely
83	8	pituus	päättely	163	k1	pituus	muunnos
83	9	pituus	päättely	164	1	pituus	soveltava
83	10	pituus	päättely	165	2	pituus	soveltava
83	11	pituus	päättely	165	3	pituus	soveltava
105	2	pituus	soveltava	165	4	pituus	soveltava
105	3	pituus	soveltava	165	5	pituus	soveltava
105	4	pituus	soveltava	166	6	pituus	yhteen- ja vähennyslasku
105	5	pituus	soveltava	166	7		EI LIITY
107	k1	pituus	soveltava	167	8	pituus	päättely
107	k2	pituus	soveltava	167	k1	pituus	allekkainlasku
109	2	pituus	soveltava	167	k2	pituus	yhteen- ja vähennyslasku
109	3	pituus	soveltava	168	1	massa	soveltava
109	4	pituus	soveltava	169	2	massa	yhteen- ja vähennyslasku
109	5	pituus	soveltava	169	3	massa	yhteen- ja vähennyslasku
111	k1	pituus	soveltava	169	4	massa	yhteen- ja vähennyslasku
111	k2	pituus	soveltava	170	5	massa	valitse massa
113	2	pituus	soveltava	170	6		EI LIITY
113	3	pituus	soveltava	171	7	massa	päättely
113	4	pituus	soveltava	171	k1	massa	allekkainlasku
113	5	pituus	soveltava	171	k2		EI LIITY
152	1	pituus	lue pituus	172	1	massa	soveltava
152	2	pituus	lue pituus	172	2	massa	muunnos
152	1	pituus	lue pituus	173	3	massa	päättely
152	2	pituus	lue pituus	174	4	massa	valitse massa
153	3	pituus	soveltava	174	5		EI LIITY
154	4	pituus	valitse pituus	175	6	massa	päättely
154	5	pituus	muunnos	175	k1	massa	allekkainlasku
155	6	pituus	päättely	175	k2	massa	muunnos
155	k1	pituus	lue pituus	175	k3		EI LIITY
155	k2	pituus	muunnos	176	1	pituus	muunnos
156	1	pituus	muunnos	177	2	massa	yhteen- ja vähennyslasku
156	2	pituus	muunnos	177	3		EI LIITY
156	3	pituus	muunnos	178	4	pituus	muunnos
156	4	pituus	muunnos	178	5		EI LIITY
157	5	pituus	soveltava	179	6	massa	päättely
158	6	pituus	valitse pituus	179	k1	pituus	muunnos
158	7		EI LIITY	179	k2	pituus	muunnos
159	8	pituus	päättely	181	1		EI LIITY
159	k1	pituus	muunnos	181	2	pituus	muunnos
159	k2	pituus	muunnos	181	3	pituus	muunnos
159	k3	pituus	muunnos	181	4	massa	soveltava
159	k4		EI LIITY	182	1		EI LIITY
160	1	pituus	muunnos	182	2		EI LIITY
161	2	pituus	soveltava	183	3		EI LIITY
161	3	pituus	soveltava	183	k1	pituus	muunnos
161	4	pituus	soveltava	183	k2	massa	yhteen- ja vähennyslasku
161	5	pituus	soveltava	203	6	massa	päättely
162	6	pituus	päättely				

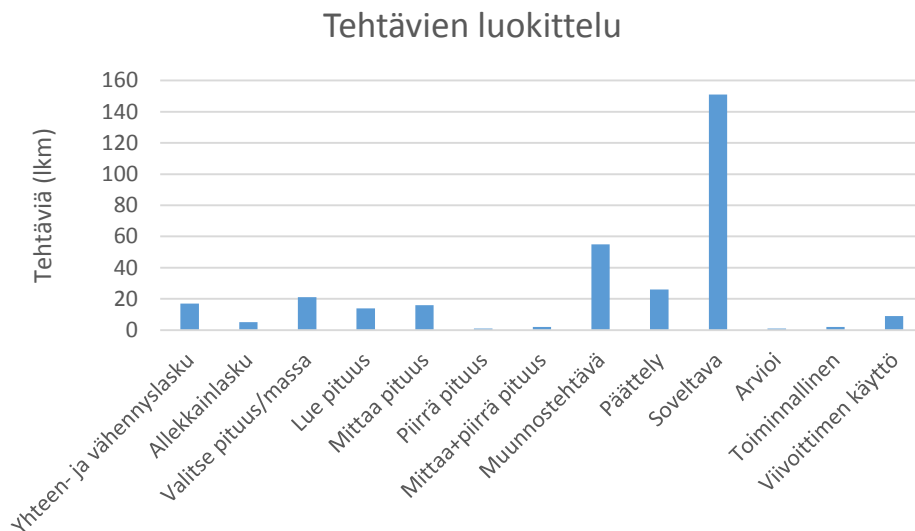
Kuva 2: Aineiston pelkistäminen. *Kymppi* -kirjasta [93] Excel- taulukkoon kootut pituuden ja massan tehtävät. Sivunumerot ovat oppilaan kirjan sivunumeroinnin mukaisia. Tehtävänumeron edessä oleva kirjain *k* tarkoittaa kotitehtävää.

sivu	tehtävänro	suure	luokka	sivu	tehtävänro	suure	luokka	sivu	tehtävänro	suure	luokka
12	1	pituus	soveltava	75	4	pituus	soveltava	99	6	pituus	muunnos
13	2	pituus	soveltava	75	5	pituus	soveltava	99	7	pituus	muunnos
13	3	pituus	soveltava	75	6	pituus	soveltava	114	1	pituus	soveltava
15	13	pituus	soveltava	75	7	pituus	soveltava	114	2	pituus	soveltava
15	14	pituus	soveltava	75	8	pituus	soveltava	114	3	pituus	soveltava
15	15	pituus	soveltava	76	1	pituus	soveltava	114	4	pituus	soveltava
15	16	pituus	soveltava	76	2	pituus	soveltava	114	5	pituus	soveltava
25	16	pituus	soveltava	76	3	pituus	soveltava	114	6	pituus	soveltava
25	17	pituus	soveltava	76	4	pituus	soveltava	136	1	pituus	mittaa pituus
25	18	pituus	soveltava	77	5	pituus	soveltava	137	1	pituus	soveltava
25	19	pituus	soveltava	77	6	pituus	soveltava	137	2	pituus	soveltava
25	20	pituus	soveltava	77	7	pituus	soveltava	137	3	pituus	soveltava
35	6	pituus	soveltava	77	8	pituus	soveltava	137	4	pituus	soveltava
35	7	pituus	soveltava	77	9	pituus	soveltava	138	1	pituus	soveltava
35	8	pituus	soveltava	77	10	pituus	soveltava	138	2	pituus	soveltava
35	9	pituus	soveltava	78	1	massa	valitse massa	138	3	pituus	soveltava
35	10	pituus	soveltava	78	2	massa	valitse massa	138	4	pituus	soveltava
38	1	pituus	soveltava	78	3	massa	valitse massa	139	1	pituus	soveltava
38	2	pituus	soveltava	78	4	massa	valitse massa	139	2	pituus	soveltava
38	3	pituus	soveltava	79	5	massa	valitse massa	141	1	massa	soveltava
38	4	pituus	soveltava	79	6	massa	yhteen- ja vähennyslasku	141	2	massa	soveltava
38	5	pituus	soveltava	79	7	massa	yhteen- ja vähennyslasku	141	3	massa	soveltava
48	1	pituus	viivoittimen käyttö	79	8	massa	yhteen- ja vähennyslasku	141	4	massa	soveltava
48	2	pituus	viivoittimen käyttö	80	1	massa	valitse massa	141	5	massa	soveltava
48	3	pituus	viivoittimen käyttö	80	2	massa	valitse massa	144	1	massa	soveltava
49	4	pituus	viivoittimen käyttö	80	3	massa	valitse massa	144	2	massa	soveltava
68	1	pituus	lue pituus	80	4	massa	valitse massa	144	3	massa	soveltava
68	2	pituus	lue pituus	81	5	massa	soveltava	144	4	massa	soveltava
68	3	pituus	lue pituus	81	6	massa	soveltava	149	k1	pituus	soveltava
68	4	pituus	lue pituus	81	7	massa	soveltava	149	k2	pituus	soveltava
68	5	pituus	lue pituus	81	8	massa	valitse massa	150	k1	pituus	soveltava
68	6	pituus	lue pituus	87	3	pituus	muunnos	150	k2	pituus	soveltava
68	7	pituus	lue pituus	87	4	pituus	muunnos	156	k1	pituus	viivoittimen käyttö
68	8	pituus	lue pituus	87	7	massa	soveltava	160	k1	pituus	mittaa pituus
69	9	pituus	mittaa pituus	87	8	pituus	soveltava	160	k2	pituus	mittaa ja piirrä
70	1	pituus	mittaa pituus	95	7	pituus	soveltava	160	k3	pituus	mittaa ja piirrä
71	2	pituus	arvioi	95	8	pituus	soveltava	161	k1	pituus	muunnos
71	3	pituus	mittaa pituus	95	9	pituus	soveltava	161	k2	pituus	muunnos
72	1	pituus	valitse pituus	95	10	pituus	soveltava	162	k1	pituus	muunnos
72	2	pituus	valitse pituus	95	11	pituus	soveltava	162	k2	pituus	muunnos
72	3	pituus	valitse pituus	95	12	pituus	soveltava	162	k1	pituus	muunnos
72	4	pituus	valitse pituus	97	36	pituus	soveltava	162	k2	pituus	muunnos
73	5	pituus	päättely	97	38	pituus	soveltava	162	k3	pituus	muunnos
73	6	pituus	päättely	97	39	pituus	soveltava	162	k4	pituus	muunnos
73	7	pituus	muunnos	98	1	massa	päättely	163	k1	massa	soveltava
73	8	pituus	muunnos	98	2	massa	soveltava	163	k2	massa	soveltava
74	1	pituus	muunnos	98	3	massa	soveltava	163	k3	massa	soveltava
74	2	pituus	muunnos	98	4	massa	soveltava	163	k4	massa	soveltava
74	3	pituus	soveltava	98	5	massa	soveltava	163	k1	massa	yhteen- ja vähennyslasku
								163	k2	massa	yhteen- ja vähennyslasku

Kuva 3: Aineiston pelkistäminen. *Laskutaito* -kirjasta [73] Excel- taulukkoon kootut pituuden ja massan tehtävät. Sivunumerot ovat oppilaan kirjan sivunumeroinnin mukaisia. Tehtävänumeron edessä oleva kirjain *k* tarkoittaa kotitehtävää.



Kuva 4: Pituuden ja massan tehtävien jakautuminen eri kirjojen välillä. *Kympissä* ja *Tuhattaiturissa* tehtäviä oli 86 ja *Laskutaidossa* 148.



Kuva 5: Ryhmittelyvaiheessa muodostetut 13 luokkaa. Tehtäviä oli yhteensä 320.

Konkreettiset tehtävät	Päätelytehtävät	Peruslaskutaitoja vahvistavat tehtävät
Mittaa pituus	Valitse pituus/massa	Yhteen- ja vähennyslasku
Piirrä pituus	Lue pituus	Allekkainlasku
Mittaa+piirrä pituus	Päätely	Muunnostehtävä
Toiminnallinen	Soveltava	Viivoittimen käyttö
	Arvioi	

Kuva 6: Käsitteellistämisvaiheessa muodostetut kolme pääluokkaa.

B Tunti- ja kotitehtävät

Kaikki tunti- ja kotitehtävät sekä osaamista mittaavat tehtävät ovat ladattavissa osoitteesta: <https://drive.google.com/open?id=0BzWDtelpVN1vaDR5TDkwbDNTNm8>
(Luettu 8.11.2016)

C Itsearviointi ja mielipidekysely

Nimi: _____

1. Mitä sinulle on jäänyt parhaiten mieleen pituuden ja painon oppitunneista?

2. Mikä on ollut kivointa? Voit kertoa useammankin asian.

3. Mikä on ollut tylsintä? Voit kertoa useammankin asian.

4. Kuinka hyvin olet omasta mielestäsi oppinut,

a) mitä pituuden mittaamisella tarkoitetaan?



b) millä tavoin pituutta voidaan mitata?



c) mitä painon mittaamisella tarkoitetaan?



d) millä tavoin painoa voidaan mitata?

